GİRİŞ

Bu ünitede ikinci dereceden bir bilinmeyenli *(ya da ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleme dönüşebilen)* denklemler ile gerek matematik ve gerekse uygulamalı bilimlerde çok kullanılan fonksiyon kavramını inceleyeceğiz. Bunları yaparken, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözme, köklerinin varlığını inceleme, kökleri bulma, köklerle katsayılar arasındaki ilişkileri bulma işlemleri ile grafiği belli özelikler taşıyan tek değişkenli fonksiyonları ve bu fonksiyonların temel özeliklerini ele alacağız.

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki her açık önermeye **ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem** denir. Bir açık önermeyi doğrulayan (eğer varsa) x gerçek sayılarına **denklemin kökleri**, tüm köklerin oluşturduğu kümeye denklemin **çözüm kümesi** veya **doğruluk kümesi,** çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de **denklemi çözme** denir.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ sayılarına ikinci dereceden **denklemin katsayıları** denir. Burada, daima $a \neq 0$ dır $b = 0$ veya $c = 0$ olabilir.

$b = 0$ ve $c = 0$ ise denklem; $ax^2 = 0$

$b \neq 0$ ve $c = 0$ ise denklem; $ax^2 + bx = 0$

$b = 0$ ve $c \neq 0$ ise denklem; $ax^2 + c = 0$

biçimini alır. Bu tür denklemler ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin özel durumlarıdır.

$ax^2 = 0$ biçimindeki denklemlerin çözümü

$$\begin{aligned} ax^2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 0 \quad (a \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x.x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{veya} \quad x = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \end{aligned}$$

olur. Buna göre denklemin birbirine eşit, gerçek iki (iki kat) kökü vardır. Çözüm kümesi şudur:

$$Ç = \{0\}$$

Örnek:

$$-\frac{7}{8}x^2 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$$\begin{aligned}
-\frac{7}{8}x^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x.x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{veya} \quad x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = 0
\end{aligned}$$

Ohalde, çözüm kümesi şudur:

$$Ç = \{0\}$$

$ax^2 + bx = 0$ biçimindeki denklemlerin çözümü

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(ax + b) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{veya} \quad ax + b = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{veya} \quad ax = -b \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{veya} \quad x_2 = -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

$$Ç = \{0, -\frac{b}{a}\}$$

Örnek:

$$5x^2 - 4x = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4x = 0 &\Leftrightarrow x(5x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{veya} \quad 5x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{veya} \quad x_2 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$Ç = \{0, \frac{4}{5}\}$$

olur.

$ax^2 + c = 0$ biçimindeki denklemlerin çözümü

$$\begin{aligned} ax^2 + c = 0 &\Leftrightarrow ax^2 = -c \\ &\Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

a ve c aynı işaretli ise $-\frac{c}{a} < 0$ olacağından denklemin gerçek kökleri yoktur. $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi

$$Ç = \{\}$$

olur.

a ve c ters işaretli ise $-\frac{c}{a} > 0$ olacağından denklemin $x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ve $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ gibi gerçek iki kökü vardır. Çözüm kümesi,

$$Ç = \{\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\}$$

olur.

Örnekler:

1. $27x^2 + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 27x^2 + 3 = 0 &\Leftrightarrow 27x^2 = -3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Karesi $(-\frac{1}{9})$ a eşit olan hiç bir gerçek sayı yoktur. Bu durumda denklemin çözüm kümesi,

$$Ç = \{\}$$

olur.

2. $4x^2 - 16 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16 = 0 &\Leftrightarrow 4x^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \end{aligned}$$

$(-2)^2 = 4$ ve $2^2 = 4$ olduğundan istenen koşula uyan iki tane $x \in \mathbb{R}$ sayısı vardır ve bu sayılar -2 ve 2 dir. Çözüm kümesi

$$Ç = \{-2, 2\}$$

olur.

$ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlerin çözümü

Örnekler:

1. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 5x + 1 = 0 &\Leftrightarrow 6[x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}] = 0 \\ &\Leftrightarrow 6[x^2 - \frac{5}{6}x + (\frac{-5}{12})^2 - (\frac{-5}{12})^2 + \frac{1}{6}] = 0 \\ &\Leftrightarrow 6[x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{25}{144} - \frac{25}{144} + \frac{1}{6}] = 0 \\ &\Leftrightarrow 6[(x - \frac{5}{12})^2 - \frac{1}{144}] = 0 \\ &\Leftrightarrow 6(x - \frac{5}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow 6(x - \frac{5}{12} + \frac{1}{12})(x - \frac{5}{12} - \frac{1}{12}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{veya} \quad x - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{veya} \quad x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi,

$$Ç = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$$

olur.

2. $3x^2 - 2x + 7 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}
3x^2 - 2x + 7 &\Leftrightarrow 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}) = 0 \\
&\Leftrightarrow 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{7}{3}) = 0 \\
&\Leftrightarrow 3[(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{20}{9}] = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - \frac{1}{3})^2 + \frac{20}{9} = 0
\end{aligned}$$

$\frac{20}{9} > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x - \frac{1}{3})^2 \geq 0$ olduğundan, bu iki ifadenin toplamı hiç bir gerçek sayı için sıfır olmaz. Bu nedenle verilen denklemin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{\}$$

olur.

Şimdi genel,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0 \\
&\Leftrightarrow a[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}] = 0 \\
&\Leftrightarrow a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] = 0 \\
&\Leftrightarrow a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] = 0
\end{aligned}$$

$a \neq 0$ olduğundan,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin.kökleri ile

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \qquad (1)$$

denkleminin kökleri aynıdır.

(1)denkleminde $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için,

$$(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0 \quad \text{ve} \quad 4a^2 > 0$$

olduğundan (1) denklemini doğrulayan x gerçek sayısının bulunması için gerek ve yeter koşul,

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

olmasıdır.

1. $b^2 - 4ac > 0$ ise (1) denklemi

$$(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\mid a\mid})^2 = 0$$

veya

$$(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\mid a\mid})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\mid a\mid}) = 0 \qquad (2)$$

biçiminde yazılır.

$a \neq 0$ olduğuna göre, $a > 0$ veya $a < 0$ dır.

$a > 0 \Rightarrow \mid a \mid = a$ olacağından (2) denklemi,

$$(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) = 0$$

veya

$$(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) = 0 \qquad (3)$$

biçimini alır. Buradan,

$$x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ve

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

olur. Yada iki kök birleştirilerek,

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

bulunur.

$a < 0 \Rightarrow |\, a \,| = -a$ olacağından (2) denklemi

$$(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2(-a)})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2(-a)}) = 0$$

ya da

$$(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) = 0$$

biçimini alır. Bu denklem ise (3) denklemine denktir. Yani çözüm kümeleri aynıdır.

Bu durumda,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminini çözüm kümesi,

$$Ç = \{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\}$$

olur.

2. $b^2 - 4ac = 0$ ise $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$ olacağından (1) denklemi,

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

biçimini alır.

$$\begin{aligned}
(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \text{veya} \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{b}{2a} \quad \text{veya} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda denklemin birbirine eşit gerçek iki kökü (iki kat kök ya da çakışık iki kökü) vardır.

Çözüm kümesi,

$$Ç = \{-\frac{b}{2a}\}$$

olur.

3. $b^2 - 4ac < 0$ ise $4ac - b^2 > 0$ olacağından (1) denklemi,

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \tag{4}$$

biçimini alır.

$\frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ olacağından (4) ifadesi daima sıfırdan büyüktür. Bu eşitliği doğrulayan hiç bir x gerçek sayısı bulunamaz. Denklemin $\mathbb{R}$ içindeki çözüm kümesi,

$$Ç = \{\}$$

olur.

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin gerçek köklerinin varlığının $\mathbf{b^2 - 4ac}$ sayısına bağlı olduğunu gördük. Bu sayıya denklemin **diskriminantı** denir ve Δ ile gösterilir.

Öğrendiklerimizi özetliyecek olursak:

1. $\Delta > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır. Bunlar,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dır.

2. $\Delta = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirine eşit iki gerçek kökü (çakışık iki kökü veya iki kat kök) vardır. Bunlar,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

dır.

3. $\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c$ denkleminin gerçek kökleri yoktur. Bu denklemin gerçek sayılardaki çözüm kümesi ϕ dir.

Örnekler:

1. $6x^2 - 13x + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Önce verilen denklemin diskriminantını bulalım.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-13)^2 - 4.6.5 \\ &= 169 - 120 \\ &= 49 > 0\end{aligned}$$

olduğundan denklemin birbirinden farklı ve gerçek iki kökü vardır.Bu kökler,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{49}}{2.6} = \frac{13 + 7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{49}}{2.6} = \frac{13 - 7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, çözüm kümesi,

$$Ç = \{\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\}$$

olur.

---

2. $9x^2 + 12x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

---

3. $2x^2 - 3x + 7 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4.2.7 \\ &= 9 - 56 \\ &= -47 < 0\end{aligned}$$

olduğundan, denklemin gerçek kökleri yoktur. Ohalde, çözüm kümesi,

$$Ç = \{\}$$

olur.

4. $abx^2-(a+b)x+1=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}\Delta &= [-(a+b)]^2-4ab\\ &= a^2+2ab+b^2-4ab\\ &= a^2-2ab+b^2\\ &= (a-b)^2\end{aligned}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(a+b)+\sqrt{(a-b)^2}}{2ab}=\frac{(a+b)+(a-b)}{2ab}=\frac{2a}{2ab}=\frac{1}{b}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(a+b)-\sqrt{(a-b)^2}}{2ab}=\frac{(a+b)-(a-b)}{2ab}=\frac{2b}{2ab}=\frac{1}{a}$$

$$Ç=\{\frac{1}{b},\frac{1}{a}\}$$

olur.

5. $mx^2-(2m+3)x+m+1=0$ denkleminin birbirine eşit gerçek iki kökü olması için m nin alacağı değeri bulalım.

Denklemin birbirine eşit gerçek iki kökü olması için,

$$\Delta=b^2-4ac=0$$

olmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}b^2-4ac=0 &\Rightarrow [-(2m+3)]^2-4m(m+1)=0\\ &\Rightarrow 4m^2+12m+9-4m^2-4m=0\\ &\Rightarrow 8m+9=0\\ &\Rightarrow m=-\frac{9}{8}\end{aligned}$$

çıkar.

6. $(m-3)x^2+2mx+5m-1=0$ denkleminin köklerinden birinin (2) olması için m nin alacağı değeri bulalım.

(2) denklemin bir kökü olduğuna göre, denklemi sağlar. O halde,

$$\begin{aligned}(m-3).2^2+2m.2+5m-1=0 \quad &\Rightarrow \quad 4m-12+4m+5m-1=0\\ &\Rightarrow \quad 13m-13=0\\ &\Rightarrow \quad 13m=13\\ &\Rightarrow \quad m=1\end{aligned}$$

olur.

7. $mx^2+\sqrt{2}x-1=0$ denkleminin gerçek iki kökünün olması için m nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdakilerden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olanları işaretleyiniz.

   a) $(x+6)(x-3)=0$ b) $(3x-1)^2-1=0$
   c) $-3x^2+5=0$ d) $2^{4x}-16=0$
   e) $x(x+2)=0$ f) $x+\frac{3}{x}-1=0$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $\frac{5}{7}x^2=0$ b) $(5a+3)x^2=0$
   c) $3x^2+x+4=4+x$ d) $5x^2+3x=x(x+3)$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $5x^2-45x=0$ b) $(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+3)=-6$
   c) $\frac{3x^2}{7}=\frac{x}{14}-\frac{x^2}{2}$ d) $(2x-1)(3x+7)=5x-7$

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $(5x-2)(5x+2)=12$ b) $(a-b)^2x^2=a^2-b^2$
   c) $3x^2-243=0$ d) $7x^2-11x=3x^2+53$

5. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $x^2-16x+39=0$ b) $6x^2+19x+10=0$
   c) $x^2-2x-11=0$ d) $(4x-3)^2=(8x-6)(7x-2)$

6. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $\sqrt{3}x^2 - 7x + 2\sqrt{3} = 0$
   b) $x^2 - (\sqrt{5} - 4)x - 7 - 5\sqrt{5} = 0$

7. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x - b^2 + a^2 = 0$
   b) $2(a - b)x^2 + (b^2 - a^2 - 2)x + a + b = 0$

8. $6x^2 + (7m - 3)x + 2m^2 - 3m - 9 = 0$ denkleminin köklerinin birbirine eşit olması için m nin alacağı değeri bulunuz.

9. $mx^2 - (2m - 3)x + m - 2 = 0$ denkleminin gerçek iki kökü olması için m nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

10. $6x^2 + mx + m + 1 = 0$ denkleminin bir kökünün $\frac{4}{3}$ olması için m nin alacağı değeri bulunuz.

İkinci Dereceden Bir Denkleme Dönüştürülebilen Denklemlerin Çözümü

Bazı denklemler ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem biçiminde olmadığı halde, bunların üzerinde bazı işlemler yaparak ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem biçimine getirerek çözeriz.

Polinomların Çarpımı veya Bölümü Biçimindeki Denklemlerin Çözümü

$P(x)$ ve $Q(x)$ birinci veya ikinci dereceden birer polinom olmak üzere,
a) $P(x).Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ veya $Q(x) = 0$
b) $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$
dır.

Örnekler: 1.

$$(4x+3)(x^2-9x+14)=0 \Leftrightarrow 4x+3=0 \vee x^2-9x+14=0$$
$$\Leftrightarrow 4x=-3 \vee x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4} \vee x=2 \vee x=7$$

denklemin çözüm kümesi,

$$Ç=\{-\frac{3}{4},2,7\}$$

olur.

2. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=0$ **denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \wedge x^2-8x+15\neq 0$$
$$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=3)\wedge(x\neq 3 \wedge x\neq 5)$$

buna göre denklemin çözüm kümesi,

$$Ç=\{2\}$$

olur.

---

3. Aşağıdaki denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\frac{2x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x-3}-\frac{3}{2}=0$$

Yardımcı Bilinmeyen Kullanılarak Çözülebilen Denklemler

$ax^4+bx^2+c=0$ biçimindeki denklemler.

Bu tür denklemleri çözmek için $x^2=t$ dönüşümü yapılırsa $at^2+bt+c=0$ biçiminde ikinci dereceden bir denklem elde edilir.

t nin bulunan değerlerinin karekökleri (varsa) verilen denklemin kökleridir.

Örnekler: 1. $x^4 - x^2 - 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} t^2 - t - 12 = 0 &\Rightarrow t = -3 \vee t = 4 \\ &\Rightarrow x^2 = -3 \vee x^2 = 4 \\ &\Rightarrow c_1 = \{\} \vee c_2 = \{-2, 2\} \end{aligned}$$

verilen denklemin çözüm kümesi,

$$Ç = c_1 \cup c_2 = \{-2, 2\}$$

olur.

2. $(\frac{x}{2x-3})^2 - \frac{5x}{2x-3} + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$\frac{x}{2x-3} = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} t^2 - 5t + 6 = 0 &\Rightarrow t_1 = 2 \vee t_2 = 3 \\ &\Rightarrow \frac{x}{2x-3} = 2 \vee \frac{x}{2x-3} = 3 \\ &\Rightarrow x = 4x - 6 \vee x = 6x - 9 \\ &\Rightarrow x = 2 \vee x = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

bulunur.

Denklemin çözüm kümesi

$$Ç = \{2, \frac{9}{5}\}$$

olur.

3. $2x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$x^{\frac{1}{3}} = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} 2x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - 5 = 0 \wedge x^{\frac{1}{3}} = t &\Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \wedge t \neq 0 \\ &\Rightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = 2 \\ &\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \vee x^{\frac{1}{3}} = 2 \\ &\Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = (\frac{1}{2})^3 \vee (x^{\frac{1}{3}})^3 = 2^3 \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{8} \vee x = 8 \end{aligned}$$

verilen denklemin çözüm kümesi

$$Ç = \{\frac{1}{8}, 8\}$$

olur.

4. Aşağıdaki denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$2^{x+1} + 2^{x-1} - \frac{10}{2^{x-2}} = 0$$

Köklü Denklemlerin Çözümü

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ türündeki denklemleri çözmek için eşitliğin iki tarafının verilen kök kuvvetini alarak denklemi kökten kurtarırız. Elde edilen yeni denklemi çözerek köklerini buluruz.

Kuvvet alma işlemi sırasında yabancı kökler girebileceğinden, bulunan kök veya köklerin verilen denklemi sağlayıp sağlamadığı mutlaka kontrol edilmelidir.

Örnekler:

1. $x + \sqrt{x^2 + 16x - 80} = 10$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Verilen denklemi $\sqrt{x^2 + 16x - 80} = 10 - x$ biçiminde yazarak köklü ifadeyi eşitliğin bir yanında yalnız bırakalım.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 16x - 80} = 10 - x \quad &\Rightarrow \quad (\sqrt{x^2 + 16x - 80})^2 = (10 - x)^2 \\
&\Rightarrow \quad x^2 + 16x - 80 = 100 - 20x + x^2 \\
&\Rightarrow \quad 36x = 180 \\
&\Rightarrow \quad x = 5
\end{aligned}$$

$x = 5$ in verilen denklemi sağlayıp sağlamadığına bakalım.

$$5 + \sqrt{5^2 + 16.5 - 80} = 10 \Rightarrow 10 = 10$$

Buna göre, verilen denklemin çözüm kümesi,

$$Ç = \{5\}$$

olur.

2. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+2} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Verilen eşitliğin sağlanması için,

$$\begin{aligned} 4x+1 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 &\Rightarrow x \geq -\frac{1}{4} \wedge x \geq -2 \\ &\Rightarrow x \geq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+1} = 1 + \sqrt{x+2} &\Rightarrow (\sqrt{4x+1})^2 = (1+\sqrt{x+2})^2 \\ &\Rightarrow 4x+1 = 1 + 2\sqrt{x+2} + x + 2 \\ &\Rightarrow 3x - 2 = 2\sqrt{x+2} \\ &\Rightarrow (3x-2)^2 = (2\sqrt{x+2})^2 \\ &\Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 4x + 8 \\ &\Rightarrow 9x^2 - 16x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x = -\frac{2}{9} \vee x = 2 \end{aligned}$$

bulunur. x 'in bulunan bu değerleri $x \geq -\frac{1}{4}$ koşuluna uygun olduğundan, verilen denklemin çözüm kümesi,

$$Ç = \{-\frac{2}{9}, 2\}$$

olur.

Mutlak Değer İçeren Denklemlerin Çözümü

Bu tür denklemleri çözerken, mutlak değer işareti arasındaki ifadenin hangi aralıkta pozitif, hangi aralıkta negatif olacağını belirlememiz gerekir. Bu işlem, mutlak değer işaretini hangi koşullara göre kaldırabileceğimizi belirler.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Örnek:

1. $x^2 - \mid 2x - 3 \mid = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

a)

$$\begin{aligned}
2x-3<0 &\Rightarrow x<\frac{3}{2}\\
&\Rightarrow \mid 2x-3\mid=-(2x-3) \quad \text{olduğundan,}\\
x^2-\mid 2x-3\mid=0 &\Rightarrow x^2-[-(2x-3)]=0\\
&\Rightarrow x^2+2x-3=0\\
&\Rightarrow x_1=1 \vee x=-3
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu değerler $x<\frac{3}{2}$ koşuluna uygun olduğundan verilen denklemin kökleridir.

b)

$$\begin{aligned}
2x-3\geq 0 &\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}\\
&\Rightarrow \mid 2x-3\mid=2x-3 \quad \text{olduğundan,}\\
x^2-\mid 2x-3\mid=0 &\Rightarrow x^2-2x+3=0
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemin çözüm kümesi ϕ dir. Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi,

$$Ç=\{-3,1\}$$

olur.

2. $x\mid x-1\mid=12$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $(x-1)(2x-3)(9x^2-15x+4)=0$

   b) $x^4-x^3+x^2-x=0$

   c) $(6x-2)(2x-5)=(3x-1)^2$

   d) $\frac{25}{4}(2x+3)^2-18x=27$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $\frac{4}{x-2}+3=\frac{2}{x+2}$ b) $4+\frac{9}{x^2}=\frac{12}{x}$

   c) $\frac{1-2x}{1-x}=\frac{3x}{2x+1}+\frac{x^2+11}{2x^2-x-1}$

   d) $\frac{2x-1}{x^2-x-12}+\frac{x+2}{x^2+x-6}=0$

3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

   a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

   b) $4x^6 - 2x^3 - 1 = 0$

   c) $2^{2x} - 3.2^{x+2} - 32 = 0$

   d) $6x^{-2} = x^{-1} + 1$

   e) $(x-1)^{1/2} - 2(x-1)^{1/4} = 15$

   f) $(\frac{x+1}{x+2})^2 - 8 + 2(\frac{x+1}{x+2}) = 0$

   g) $(x^2 + 3x)^2 + 8 = 6x^2 + 18x$

   h) $(\frac{x-1}{x+3})^2 + 3 = 4(\frac{1-x}{x+3})$

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $x + \sqrt{x-2} - 4 = 0$

   b) $\sqrt{2x-6} + x = 3$

   c) $3x = \sqrt{7x-10}$

   d) $\sqrt[4]{\frac{x}{3}} - 1 = 2$

   e) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3} = 1$

   f) $\sqrt{5x-1} + \sqrt{4(x-1)} = 5$

   g) $\sqrt{3y^2 + 4y + 2} - 1 = 2y$

   h) $\sqrt{3x+8} - \sqrt{3(1-2x)} = 2$

5. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $x^2 = \mid 28 - 3x \mid$ b) $4x \mid x - 2 \mid -4 = 7$

   c) $x \mid 2x - 3 \mid + \mid 3x - 4 \mid +4 = 0$ d) $x^2 - 4 \mid x \mid = 21$

İkinci Dereceden Bir Denklemin Kökleriyle Katsayıları Arasındaki Bağıntılar

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin diskriminantı pozitif ise, yani,

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

ise, denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır.

Bu kökler,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

dır.

Şimdi bu köklerle denklemin a, b, c katsayıları arasında bazı bağıntılar kuracağız.

Köklerin Toplamı:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Köklerin Çarpımı:

$$\begin{aligned} x_1.x_2 &= (\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}) \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Köklerin Farkının Mutlak Değeri:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \left| \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| \\ &= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \end{aligned}$$

Örnekler:

1. $4x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin,

a) Köklerinin toplamını,

b) Köklerinin çarpımını,

c) Köklerin farkının mutlak değerini,

bulalım.

a)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{4} = \frac{5}{4}$$

b)

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

c)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.4.1 = 25 - 16 = 9$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4}$$

2. $7x^2 + 5x - 3 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = \frac{2}{7}$ olduğuna göre, diğer kökünü bulalım.

Verilen denklemin kökleri $x_1 = \frac{2}{7}$ ve x_2 olduğuna göre, köklerin toplamını yazalım.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad &\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{5}{7} \\
&\Rightarrow \quad \frac{2}{7} + x_2 = -\frac{5}{7} \\
&\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{5}{7} - \frac{2}{7} \\
&\Rightarrow \quad x_2 = -1
\end{aligned}
$$

olur.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek iki kökü x_1, x_2 olsun.

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ b) $x_1^2 + x_2^2$ sayılarını a, b, c sayılarına bağlı olarak hesaplayalım.

a)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

b)

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\frac{b}{a})^2 - 2\frac{c}{a} \\
&= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}
\end{aligned}
$$

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemi Bulma

Bu bölümde, çözüm kümesi $\{x_1, x_2\}$ olan ikinci dereceden denklemin bulunmasını inceleyeceğiz.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

denkleminin gerçek iki kökü x_1, x_2 olsun (1) denkleminin

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$$

biçiminde yazılabileceğini biliyoruz. Buradan, $a \neq 0$ olduğundan,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

veya

$$x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (2)$$

olur.

(1) ve (2) denklemleri denktir. Yani, çözüm kümeleri aynıdır.

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = S$$

$$\frac{c}{a} = x_1.x_2 = P$$

değerleri, (2) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

veya

$$x^2 - Sx + P = 0$$

denklemi elde edilir.

Sıfırdan farklı her a gerçek sayısı için,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

denklemi ile

$$a(x^2 - Sx + P) = 0$$

denklemleri denktir. Buna göre, $\{x_1, x_2\}$ kümesini çözüm kümesi kabul eden,

$$a(x^2 - sx + p) = 0$$

denklemi bir tane değildir. a'nın her değeri için, böyle, ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemlerin hepsinin çözüm kümeleri aynıdır.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

denklemi, bu denklemlerin bir temsilcisidir.

Örnekler:

1. Kökleri $x_1 = 3$ ve $x_2 = -7$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.

$$S = x_1 + x_2 = 3 + (-7) = -4$$

$$P = x_1x_2 = 3.(-7) = -21$$

bulunur. Bu değerler,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$x^2 - (-4)x + (-21) = 0$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

olur.

2. Çözüm kümesi $\{3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}\}$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} S = x_1 + x_2 &= (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6 \\ P = x_1.x_2 &= (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) \\ &= 3^2 - (2\sqrt{2})^2 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. İstenilen ikinci dereceden denklem,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

dan,

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

olur.

3. $2x^2 - 16x + 30 = 0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökleri $2x_1 + 5$ ve $2x_2 + 5$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım:

Bulunacak denklemin kökleri $\alpha = 2x_1 + 5$ ve $\beta = 2x_1 + 5$ olsun.

$$\begin{aligned} S &= \alpha + \beta = (2x_1 + 5) + (2x_2 + 5) \\ &= 2(x_1 + x_2) + 10 \\ P &= \alpha.\beta = (2x_1 + 5)(2x_2 + 5) \\ &= 4x_1x_2 + 10x_2 + 10x_1 + 25 \\ &= 4x_1x_2 + 10(x_1 + x_2) + 25 \end{aligned}$$

verilen denklemden,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-16}{2} = 8$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{30}{2} = 15$$

bulunur. Bu değerler S ve P de yerine yazılırsa,

$$S = 2.8 + 10 = 26$$

$$P = 4.15 + 10.8 + 25 = 165$$

olur. İstenen denklem ise,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 26x + 165 = 0$$

dır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerinin toplamını ve çarpımını bulunuz.

   a) $x^2 + 5x + 4 = 0$ b) $-x^2 - 7x + 3 = 0$
   c) $3x^2 - 2x - 11 = 0$ d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{1}{3} = 0$

2. Aşağıdaki denklemleri çözmeden,

   a) Köklerin çarpma işlemine göre terslerinin toplamını,

   b) Köklerin farkının mutlak değerini

   bulunuz.

   a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} = 0$
   c) $6x^2 = 11x + 10$ d) $-49x^2 + 35x - 4 = 0$

3. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek iki kökü x_1, x_2 olduğuna göre,

   a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ b) $x_1^3 + x_2^3$

   sayılarını a, b, c sayılarına bağlı olarak hesaplayınız.

4. Aşağıdaki denklemleri çözmeden,

   a) Köklerin kareleri toplamını,

   b) Köklerin karelerinin çarpma işlemine göre terslerinin toplamını

   bulunuz.

   a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ b) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$

   c) $-x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ d) $-x^2 + \frac{7}{6}x = \frac{10}{3}$

5. Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerin küpleri toplamını bulunuz.

   a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - 5x = 0$

   c) $2x^2 + 3x - 15 = 0$ d) $-x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} = 0$

6. Aşağıdaki çözüm kümeleri verilen ikinci dereceden denklemleri bulunuz.

   a) $\{2, 5\}$ b) $\{3, -5\}$

   c) $\{4\}$ d) $\{-3, \sqrt{3}\}$

   e) $\{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$ f) $\{5 + 2\sqrt{7}, 5 - 2\sqrt{7}\}$

7. $10x^2 - 7x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. Bu denklemi çözmeden, kökleri,

   a) $\dfrac{1}{x_1^2}, \dfrac{1}{x_2^2}$ b) $\dfrac{3}{x_1}, \dfrac{3}{x_2}$ c) $x_1 + 2, x_2 + 2$

   olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

8. $3x^2 - 19x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. Bu denklemi çözmeden, kökleri

a) $5x_1 + 4, \quad 5x_2 + 4$ b) $3x_1 - 2, \quad 3x_2 - 2$
olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

9. $2(m-1)x^2 + 5(m+2)x + 3m + 2 = 0$ denkleminin kökleri toplamı 3 olduğuna göre m'yi bulunuz.

10. $(2m-5)x^2 - (m-2)x + m^2 + 9m - 4 = 0$ denkleminin kökleri çarpımının 2 olması için m ne olmalıdır?

DEĞERLENDİRME SORULARI 4

1. $2x^2 - x = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilenden hangisidir?

   A) $\{0\}$ B) $\{0,1\}$ C) $\{0,2\}$ D) $\{0,\frac{1}{2}\}$ E) $\{0,-\frac{1}{2}\}$

2. $x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilenden hangisidir?

   A) $\{2,3\}$ B) $\{-3,2\}$ C) $\{-1,-2\}$ D) $\{1,2\}$ E) $\{0\}$

3. Aşağıdaki eşitliklerden hangisi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir?

   A) $(x-2)(x+1) = x^2 + 3$ B) $2^x = 16$
   C) $(x^2+3)(x-1) = 0$ D) $x(x+2) = 0$
   E) $(x^2-1)^2 - 1 = 0$

4. $x^2 - 4mx + 7 = 0$ denkleminin bir kökü -1 ise m kaçtır?

   A) -7 B) -5 C) -2 D) 1 E) 7

5. $x(x+3) - 2(x^2+3x)$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $\{0\}$ B) $\{1\}$ C) $\{-3\}$ D) $\{-3,0\}$ E) $\{\}$

6. $x^2 + 81 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $\{0\}$ B) ϕ C) $\{9\}$ D) $\{-9\}$ E) $\{-9,9\}$

7. Köklerinden biri $2-\sqrt{2}$ olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $x^2-2=0$ B) $x^2-2x+2=0$ C) $x^2-\sqrt{2}x+2=0$
   D) $x^2-4x+2=0$ E) $x^2+4x+2=0$

8. $x^2-(3m+1)x+9=0$ denkleminin köklerinden biri 1 ise diğer kökü kaçtır?

   A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

9. $36x^{-2}-13x^{-1}+1=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $\{4,13\}$ B) $\{4,36\}$ C) $\{1,36\}$ D) $\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}\}$ E) $\{4,9\}$

10. $x^4-5x^2+4=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

    A) $\{-2,-1,1,2\}$ B) $\{-2,1,2\}$ C) $\{-1,1,2\}$

    D) $\{-1,-2\}$ E) $\{1,2\}$

11. $2(3x-\frac{1}{x})^2-5(3x-\frac{1}{x})+2=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

    A) $\{\frac{1}{2},2\}$ B) $\{-\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2\}$ C) $\{-\frac{1}{3},\frac{1}{2},2\}$

    D) $\{-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\}$ E) $\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$

12. $\sqrt[4]{\frac{x}{3}}=1$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

    A) $\{4\}$ B) $\{3\}$ C) $\{2\}$ D) $\{1\}$ E) $\{0\}$

13. $\sqrt{4x-1}-2x=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

    A) $\{\frac{1}{2}\}$ B) $\{\frac{2}{3}\}$ C) $\{2\}$ D) $\{4\}$ E) ϕ

14. $x^2=|2x-3|$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

    A) $\{\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{1\}$ D) $\{3\}$ E) $\{-3,1\}$

15. $2x^2 - 4x + 8 = 0$ denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

    A) -4 B) 2 C) 4 D) 10 E) 8

16. $-x^2 + 7x - 3 = 0$ denkleminin kökleri toplamı kaçtır?

    A) -7 B) -3 C) 3 D) 4 E) 7

17. $6x^2 = 11x + 10$ denkleminin köklerinin çarpma işlemine göre tersleri toplamı kaçtır?

    A) $-\frac{11}{6}$ B) $-\frac{11}{10}$ C) $\frac{10}{11}$ D) $\frac{11}{10}$ E) $\frac{11}{6}$

18. $x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminin köklerinin farkının mutlak değeri kaçtır?

    A) -1 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6

19. $x^2 + mx - 3 = 0$ denkleminin kökleri toplamının 3 olması için m kaç olmalıdır?

    A) -3 B) -2 C) 0 D) 2 E) 3

20. $x^2 + mx + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ olması için m kaç olmalıdır?

    A) -4 B) -3 C) -2 D) 0 E) 3

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Bir Denklemin Köklerini Bulmadan, Köklerinin Varlığının ve İşaretinin İncelenmesi

Daha önce $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümünü gördük. Şimdi, bu denklemi çözmeden köklerle katsayılar arasındaki bağıntılardan yararlanarak, köklerinin varlığını ve işaretlerini belirlemeye çalışalım. Bunun için, verilen denklemde $\Delta, \frac{c}{a}, -\frac{b}{a}$ nın işaretlerini incelememiz gerekir.

1. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

ise, denklemin gerçek kökleri olmadığından, köklerinin işareti de söz konusu değildir.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

ise, denklemin birbirine eşit gerçek iki kökü (ya da iki kat bir kökü) vardır. Bu iki kat kökün ($x_1 = x_2$) işareti $-\frac{b}{a}$ sayısının işaretine bağlıdır.

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x_1 = x_2 < 0$
b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$
c) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x_1 = x_2$

dir.

3. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

ise, denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır. Denklemin kökleri x_1, x_2 ve $x_1 < x_2$ olsun.

a) $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ise, kökler çarpımı negatif olduğu için, kökler ters işaretlidir. Yani $x_1 < 0 < x_2$ dir.

b) $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ise, kökler çarpımı pozitif olduğundan iki kök de aynı işaretlidir. Köklerin artı işaretli mi yoksa eksi işaretli mi olduğu $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ sayısının işaretine bağlıdır.

I) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$

II) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 < 0$

dır.

c) $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = 0$ ise, köklerden biri sıfırdır. Diğer kökün işareti $-\frac{b}{a}$ sayısının işaretine bağlıdır.

I) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 = x_1 < x_2$

II) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 = 0$

dır.

Yukarıdaki öğrendiklerimizi aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz.

$\Delta < 0$	Denklemin gerçek kökleri yoktur		
$\Delta = 0$	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} > 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$	$0 < x_1 = x_2$
		$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$	$x_1 = x_2 < 0$
	$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 0$		$x_1 = x_2 = 0$
$\Delta > 0$	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} < 0$		$x_1 < 0 < x_2$
	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} > 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$	$0 < x_1 < x_2$
		$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$	$x_1 < x_2 < 0$
	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$	$0 = x_1 < x_2$
		$x_2 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$	$x_1 < x_2 = 0$

Örnekler:

1. $x^2 - 5x - 2 = 0$ denklemini çözmeden köklerinin varlığını ve işaretini inceleyelim.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.(-2) = 33 > 0$ olduğundan,
denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır.

$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -2 < 0$ olduğundan,
kökler ters işaretlidir. Yani,

$$x_1 < 0 < x_2 \text{ dir.}$$

2. $-6x^2 + 19x - 10 = 0$ denklemini çözmeden köklerinin varlığını ve işaretini inceleyelim.

$\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4(-6)(-10) = 121 > 0$ olduğundan,
denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır.

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} > 0$$

Ohalde, kökler aynı işaretlidir.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{19}{6} > 0$$

olduğu için kökler pozitif işaretlidir.

$0 < x_1 < x_2$
dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerinin varlığını ve işaretini inceleyiniz.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $3x^2 + 17x - 5 = 0$

c) $2x^2 - x - 1 = 0$ d) $-9x^2 - 2x + 11 = 0$

e) $3x^2 - 5x = 0$ f) $m^2x^2 - 3mx + 13 = 0$

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler ve Denklem Sistemleri

a, b, c sayılarından en az biri sıfırdan farklı ve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

biçimindeki denkleme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir. Bu denklemi sağlayan (x, y) gerçek sayı ikililerinin kümesine de denklemin **çözüm kümesi** adı verilir.

İki bilinmeyen içeren birinci dereceden en az iki denklemin oluşturduğu sisteme, birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi dediğimizi anımsayınız. Eğer bu denklemlerden en az bir tanesi ikinci dereceden ise, bu sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Bu tür denklem sistemlerini çözerken, verilen denklemlerden yararlanarak, yeni denklemler aranır. İki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümü ile ilgili aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Örnekler:

1. $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y + 2\sqrt{3} = 0 \end{array}\right\}$ sisteminin çözüm kümesini bulalım:

$x + y + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = -x - 2\sqrt{3}$ olur. Birinci denklemde y yerine $-x - 2\sqrt{3}$ değerini yazalım.

$$\begin{aligned} x^2+(-x-2\sqrt{3})^2=6 &\Rightarrow x^2+x^2+4\sqrt{3}x+12-6=0 \\ &\Rightarrow x^2+2\sqrt{3}x+3=0 \\ &\Rightarrow x_1=x_2=-\sqrt{3} \end{aligned}$$

olur.

$x=-\sqrt{3} \Rightarrow y=-(-\sqrt{3})-2\sqrt{3}=-\sqrt{3}$ bulunur. Verilen sistemin çözüm kümesi şudur:

$$Ç=\{(-\sqrt{3},-\sqrt{3})\}$$

2.

$$5x^2+3y^2=15 \qquad (1)$$
$$3x^2-7y^2=-2 \qquad (2)$$

sisteminin çözüm kümesini bulalım:

(1) denkleminin her iki yanını 7, (2) denkleminin her iki yanını 3 sayısı ile çarpalım.

$$\begin{array}{r} 35x^2+21y^2=105 \\ +\ 9x^2-21y^2=-6 \\ \hline 44x^2=99 \\ x=\pm\frac{3}{2} \end{array}$$

bulunan x in bu değerini (1) denklemde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} 5.\frac{9}{4}+3y^2=15 &\Rightarrow 3y^2=\frac{15}{4} \\ &\Rightarrow y^2=\frac{5}{4} \\ &\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Sistemin çözüm kümesi,

$$Ç=\{(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}),(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}),(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}),(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})\}$$

olur.

3.

$$3x - y^2 = -2 \qquad (1)$$

$$2x^2 + 5y^2 = 3 \qquad (2)$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $3x + 4y = 11$, $x + 7y = 3$

b) $\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}y = \frac{7}{2}$, $\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}y = -\frac{5}{3}$

c) $x + y = 3$, $x - y = 3$, $x - 2y = 3$

d) $9x^2 + 16y^2 = 100$, $x^2 + y^2 = 8$

e) $x^2 + y^2 + xy = 1$, $x^2 + y^2 - x - y = 0$

f) $x^2 - y^2 = 3$, $xy = 2$

g) $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 5$, $2x - y = 1$

h) $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 1$, $4x - y = 0$

i) $|x + y| = 4$, $|x - y| = 4$

j) $|3x - y| = 13$, $|2x - 5y| = 4$

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c > 0; \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0; \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

biçimindeki açık önermelere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Eşitsizliği sağlayan x gerçek sayılarının kümesine **eşitsizliğin çözüm** (doğruluk) **kümesi**, çözüm kümesini bulma işlemine de **eşitsizliği çözme** denir.

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir eşitsizliği çözmek demek, $f(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin işaretini inceleyerek eşitsizliği sağlayan aralığı bulmak demektir.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin,

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] \tag{1}$$

veya

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}] \tag{2}$$

biçiminde yazılabileceğini daha önce görmüştük. Buna göre $f(x)$ üçterimlisinin işareti a ile köşeli parantez içindeki ifadenin işaretine bağlıdır.

1. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise;

$$\frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0 \quad \text{ve} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad (x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$$

olacağından (2) bağıntısında köşeli parantezin içindeki ifade $\forall x \in \mathbb{R}$ için pozitif olur. Bu durumda $f(x)$ üçterimlisinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır. Yani;

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

olur.

Bu durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. İnceleyiniz.

x			
$f(x) = ax2 + bx + c$	$\Delta < 0$	$a > 0$	+ + +
		$a < 0$	- - -

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise (1) bağıntısı,

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

biçimini alır. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ olduğundan, $f(x)$ üçterimlisi $x = -\frac{b}{2a}$ için sıfır x in diğer bütün değerleri için a'nın işaretinin aynısıdır. Yani;

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{için} \quad f(-\frac{b}{2a}) = 0$$

$$x \neq -\frac{b}{2a} \quad \text{için} \quad \begin{cases} a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \\ a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$

dır.

Bu durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. İnceleyiniz.

x				$x = -\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	$\Delta = 0$	$a > 0$	+	0	+
		$a < 0$	-	0	-

3. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise,
$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır. Bu kökleri x_1, x_2 ile gösterelim ve $x_1 < x_2$ olsun. Bu durumda (1) bağıntısı,

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) \\ &= a(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) \qquad (3) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

değerleri (3) bağıntısında yerlerine yazılırsa,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

olur.

a) $x < x_1 < x_2$ ise;

$$\left.\begin{array}{l} x < x_1 \Rightarrow (x - x_1) < 0 \\ x < x_2 \Rightarrow (x - x_2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) > 0$$

olur.

Bu durumda, $f(x)$ üçterimlisinin işareti, a'nın işaretinin aynısıdır. Yani;

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$
$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

dır.

b) $x_1 < x < x_2$ ise;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x \Rightarrow (x - x_1) > 0 \\ x < x_2 \Rightarrow (x - x_2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) < 0$$

olur.

Bu durumda, $f(x)$ üçterimlisinin işareti, a'nın işaretinin tersidir. Yani,

$$a > 0 \Rightarrow f(x) < 0$$
$$a < 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

dır.

c) $x_1 < x_2 < x$ ise;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x \Rightarrow (x - x_1) > 0 \\ x_2 < x \Rightarrow (x - x_2) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) > 0$$

olur. Bu durumda, $f(x)$ üçterimlisinin işareti, a'nın işaretinin aynısıdır; yani,

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$
$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

olur.

d) $f(x)$ üçterimlisi x_1 ve x_2 için sıfır değerini alır.

Yukarıda öğrendiklerimizi aşağıdaki tabloda gösterebiliriz.

x				x_1		x_2	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\Delta > 0$	$a > 0$	+	0	-	0	+
		$a < 0$	-	0	+	0	-

Öğrendiklerimizi kısaca özetleyecek olursak;

1. $\Delta < 0$ ise, $\forall x \in \mathbb{R}$ için üçterimlinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır.

2. $\Delta = 0$ ise, x'in $x = -\frac{b}{2a}$ dan başka tüm değerleri için üçterimlinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır.

3. $\Delta > 0$ ise, ikinci dereceden üçterimlinin işareti, köklerin dışında a'nın işaretinin aynısı, köklerin arasında a'nın işaretinin tersidir.

Örnekler:

1. $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$ ikiterimlisinin işaretini inceleyelim.

$f(x) = ax + b = a(x + \frac{b}{a})$ ikiterimlisinin kökü $-\frac{b}{a}$ dır.

a) $x < -\frac{b}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{a}) < 0$ olacağından, ikiterimlinin işareti a'nın işaretinin tersidir, yani,

$$a < 0 \Rightarrow f(x) > 0$$
$$a > 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

olur.

b) $x > -\frac{b}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{a}) > 0$ olacağından, ikiterimlinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır.

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

dır.

Bu durumlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. İnceleyiniz.

x			$-\frac{b}{a}$	
$f(x) = ax + b$	$a > 0$	-	0	+
	$a < 0$	+	0	-

2. $f(x) = 2x - 5$ ikiterimlisinin işaretini inceleyelim.

$$\begin{aligned} 2x - 5 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x = 5 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

ikiterimlinin bir köküdür.

$x < \frac{5}{2}$ için ikiterimli $a = 2 > 0$ ile ters işaretli,

$x > \frac{5}{2}$ için ikiterimli $a = 2 > 0$ ile aynı işaretlidir.

Aşağıdaki işaret tablosunu inceleyiniz.

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f(x) = 2x - 5$		-	0	+	

3. $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ üçterimlisinin işaretini inceleyelim.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.3.7 = -59 < 0$ olduğundan,

$f(x)$ üçterimlisinin işareti a'nın işaretine bağlıdır. $a = 3 > 0$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için üçterimlinin işareti daima pozitiftir.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x) = 3x^2 - 5x + 7$		+	+	+	

4. $f(x) = -16x^2 + 8x - 1$ üçterimlisinin işaretini inceleyelim.

$\Delta = 8^2 - 4.(-1)(-16) = 0$ olduğundan,

üçterimli $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-32} = \frac{1}{4}$ için sıfır x in diğer bütün değerleri için $a = -16 < 0$ ın işaretinin aynısıdır.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x) = -16x^2 + 8x + 1$		-	0	-	

5.) $f(x) = 2x^2 + x - 6$ üçterimlisinin işaretini inceleyelim.

$\Delta = 1^2 - 4.2.(-6) = 49 > 0$ olduğundan,

$2x^2 + x - 6 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır.

Bunlar,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-7}{4} = -2$$

dır.

O halde, üçterimli kökler arasında $a = 2 > 0$ ile ters işaretli, kökler dışında aynı işaretlidir.

Üçterimlinin işaret tablosu aşağıdadır. İnceleyiniz.

x	$-\infty$		-2		3/2		$+\infty$
$f(x) = 2x^2 + x - 6$		+		-		+	

6. $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

7. $(3x+5)(x^2-8x+7) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$A(x)$ ve $B(x)$ birer polinom olmak üzere $A(x).B(x)$ biçimindeki bir çarpımın işaretini belirlemek için önce her çarpanın ayrı ayrı işareti bulunur. Bunlar bir tabloda alt alta yazılır ve çarpanların işaretlerinin çarpımı, çarpımın işaretini verir.

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x = 7$$

x	$-\infty$		-5/3		1		7		$+\infty$
$3x+5$		-		+		+		+	
$x^2 - 8x + 7$		+		+		-		+	
$(3x+5)(x^2-8x+7)$		-		+		-		+	

Eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$\text{Ç} = \{x \mid -\infty < x < -\frac{5}{3} \quad \vee \quad 1 < x < 7, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

8. $\dfrac{-6x^2+11x-4}{3x^2+4x-15} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$B(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{A(x)}{B(x)}$ ile $A(x).B(x)$ in işaretleri aynıdır. Bir eşitsizliğin paydasını sıfır yapan $x \in \mathbb{R}$ değerleri, eşitsizliğin çözüm kümesinin elemanı olamaz. Çünkü, bu değerler için eşitsizlik tanımsızdır. Bunu belirtmek için sonuçta paydanın köklerinin altına ‖ simgesini koyacağız.

$$-6x^2 + 11x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = \frac{4}{3}$$

$$3x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = \frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		-3		1/2		4/3		5/3		$+\infty$
$-6x^2 + 11x - 4$		-		-	o	+	o	-		-	
$3x^2 + 4x - 15$		+	o	-		-		-	o	+	
$\dfrac{-6x^2 + 11x - 4}{3x^2 + 4x - 15}$		-	‖	+		-		+	‖	-	

Eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$Ç = \{x \mid -\infty < x < -3 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{3} \vee \frac{5}{3} < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

9. $\frac{5x-8}{4x+5} > \frac{2(x-7)}{4x^2+17x+15}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$\frac{5x-8}{4x+5} > \frac{2(x-7)}{4x^2+17x+15} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x-8}{4x+5} - \frac{2x-14}{(4x+5)(x+3)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5(x^2+x-2)}{(4x+5)(x+3)} > 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 1$$

$$(4x+5)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 5 = 0 \vee x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{4} \vee x = -3$$

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{5}{4}$		1		$+\infty$
$5(x^2+x-2)$		+		+	0	-		-	0	+	
$(4x+5)(x+3)$		+	0	-		-	0	-		+	
$\frac{5(x^2+x-2)}{(4x+5)(x+3)}$		+		-		+		-		+	
		çözüm				çözüm				çözüm	

Eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$Ç = \{x \mid -\infty < x < -3 \vee -2 < x < -\frac{5}{4} \vee 1 < x < +\infty, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

10. $\dfrac{(x^2-7x+12)(x^2-6x+5)}{(-x^2-x+2)(x^2-9)} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Bu eşitsizliğin çözüm kümesini önceki örneklerimizde olduğu gibi işaret tablosu yardımıyla bulabiliriz. Daha pratik olarak aşağıdaki yöntemle de bulunabilir.

$A(x), B(x)$ ve $C(x)$ birer polinom olmak üzere, $A(x).B(x).C(x)$ veya $\frac{A(x).B(x)}{C(x)}$ biçimindeki ifadelerin işaretlerini incelerken önce $A(x) = 0, B(x) = 0$, ve $C(x) = 0$ polinom denklemin gerçek kökleri, küçükten büyüğe doğru tabloya yerleştirilir. $A(x), B(x)$ ve $C(x)$ polinomlarının en büyük dereceli terimlerinin katsayılarının işaretlerinin çarpımı, tabloda en büyük kökün sağına yazılır. Tablo, sola doğru tek katlı köklerde işaret değiştirerek, çift katlı köklerde işaret değiştirmeden devam eder.

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 5$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 1$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = 3$$

Burada 1 ve 3 iki kez elde edildiğinden çift katlı köktür. Polinomların en büyük dereceli terimleri $(x^2), (x^2), (-x^2), (x^2)$ nin katsayılarının işaretleri çarpımı (+)(+)(-)(+)=(-) olduğundan, tabloda en büyük kök 5'in sağındaki işaret (-) dir.

15 x	$-\infty$		-3		-2		1		3		4		5		$+\infty$
$\frac{(x^2-7x+12)(x^2-6x+5)}{(-x^2-x+2)(x^2-9)}$		-		+		-		-		-		+		-	

$$Ç = \{x \mid -3 < x < -2 \quad \vee \quad 4 \leq x \leq 5, x \in R\}$$

olur.

Eşitsizlik Sistemi

Aynı zamanda gerçeklenen birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme bir **eşitsizlik sistemi** denir. Sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin arakesitine de eşitsizlik sisteminin **çözüm kümesi** denir.

Örnekler:

1. $4x + \frac{5}{2} > 2x - 7$,
$\frac{3x-1}{2} < x + 1$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım:

$$\begin{aligned} 4x + \frac{5}{2} > 2x - 7 \quad &\Rightarrow \quad 4x - 2x > -7 - \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2x > -\frac{19}{2} \\ &\Rightarrow \quad x > -\frac{19}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{2} < x + 1 \quad &\Rightarrow \quad 3x - 1 < 2x + 2 \\ &\Rightarrow \quad 3x - 2x < 2 + 1 \\ &\Rightarrow \quad x < 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{19}{4}$		3		$+\infty$
$4x+\frac{5}{2}>2x-7$		-	o	+	|	+	
$\frac{3x-1}{2}<x+1$		-	|	-	o	+	
		//////////	|	çözüm	|	//////////	

$$Ç = \{x \mid -\frac{19}{2} < x < 3, x \in R\}$$

olur.

2. $x^2+2x-8>0$
   $x^2-4x+3<0$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım:

$$x^2+2x-8=0 \Rightarrow x=-4 \vee x=2$$

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1 \vee x=3$$

	$-\infty$		-4		1		2		3		$+\infty$
x^2+2x-8		+	o	-	|	-	o	+	|	+	
x^2-4x+3		+	|	+	o	-	|	-	o	+	
		//////////	|	//////////	|	//////////	|	çözüm	|	//////////	

$$Ç = \{x \mid 2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $-6x+7<2x-9$ c) $10+\frac{2}{3}x \leq -\frac{x}{8}+5$

2. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $x^2+6x+9\leq 0$ b) $-3x^2-6x+4\leq 0$

   c) $-x^2-2x-\frac{6}{5}<0$ d) $6x^2-11x+3>0$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $6x^2+8<2-13x$ b) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}>\dfrac{1}{x^2-3x-10}$

   c) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}<0$ d) $\dfrac{(x^2+x-12)(9-x^2)(1-x)}{(x^2-x-12)(x^2-4)}>0$

4. $(2m+1)x^2-4(m+3)x+2(2m+3)=0$ denkleminin gerçek köklerinin olmaması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

5. Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $x^2-2x-3<0$ b) $\dfrac{5x-1}{3}<0$

   $x^2+x-2>0$ $15x^2-34x+15<0$

   c) $6x^2-19x+10<0$ d) $(3x^2-8x+3)^2<4(x^2-3x-2)^2$

   $2x^2-9x+9\leq 0$ $4(x^2-5x)^2>9(x^2+4)^2$

   $x^2-3x+2>0$

DEĞERLENDİRME SORULARI 5

1. $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerinin ters işaretli olması için aşağıdaki önermelerden hangisi var olmalıdır?

   A) $\frac{c}{a}>0$ B) $b.c<0$ C) $a.c<0$ D) $\frac{-b}{a}>0$ E) $\frac{-b}{a}<0$

2. $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. $x_1.x_2>0$ ve $x_1+x_2<0$ ise aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) $x_2 < x_1 < 0$ B) $x_2 < 0 < x_1$ C) $x_1 = x_2$
D) $x_1 . x_2 > 0$ E) $x_2 > x_1 > 0$

3. $x^2 - (m-1)x - \frac{m}{2} = 0$ denkleminde $m < 0$ ise denklemin kökleri için aşağıdaki önermelerden hangisi doğru olur?

A) İki kökü de negatiftir.

B) İki kökü de pozitiftir.

C) Kökleri ters işaretlidir.

D) Kökleri birbirine eşittir.

E) Reel kökleri yoktur.

4. $x^2 - 3x - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{x \mid -4 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$ B) $\{x \mid -1 < x < 4, x \in \mathbb{R}\}$
C) $\{x \mid -3 < x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ D) $\{x \mid -1 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$
E) $\{x \mid -1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$

5. $\mid \frac{3}{2}x - 6 \mid \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-6, -2]$ B) $(-6, -2)$ C) $(2, 6)$ D) $[2, 6]$ E) $[-6, 2]$

6. $(x-3)(2x-4) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ B) $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ C) $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$
D) $(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$ E) $(-\infty, \infty)$

7. $\frac{(2-x)(x-5)}{x^4} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2, 3)$ B) $[-2, 5)$ C) $[-5, -2]$ D) $(2, 5)$ E) $[2, 5]$

8. $\frac{-x^2+5x-4}{(1-x^2)(x^2+9)} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç tanedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ denkleminin gerçek köklerinin olmaması için m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $[-1, 1]$ B) $[-1, 2]$ C) $(-2, -1)$ D) $(-1, 2]$ E) $(-1, 2)$

10.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=7 \\ x+2y=0 \end{array}\right\}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(2,-1)\}$ B) $\{(-1,2)\}$ C) $\{(-2,2)\}$
D) $\{(-1,1)\}$ E) $\{(0,1)\}$

11.

$$\left.\begin{array}{l} \text{xy=4} \\ \text{2x-y=0} \end{array}\right\}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(1,-1)\}$ B) $\{(-\sqrt{2},2\sqrt{2})\}$
C) $\{(-\sqrt{2},2\sqrt{2}),(\sqrt{2},-2\sqrt{2})\}$ D) $\{(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$
E) $\{(-\sqrt{2},-2\sqrt{2}),(\sqrt{2},2\sqrt{2})\}$

12.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7 \\ x.y=\frac{1}{12} \end{array}\right\}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$ ise $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{y_1}$ kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) 12 C) 24 D) 48 E) 144

13.

$$\left.\begin{array}{l} -x^2+x+2<0 \\ x^2-4\leq 0 \end{array}\right\}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1,2]$ B) $[-1,2]$ C) $(-1,2)$ D) $[-2,-1)$ E) $(-2,-1)$

14. $x^2+mx+1=0$ denkleminin gerçek köklerinin olmaması için m nin alacağı değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2<m<2$ B) $2<m<4$ C) $-2\leq m\leq 2$
D) $m<-2$ E) $m>2$

15. $x^2 + (m+1)x + 1 > 0$ eşitsizliğinin daima doğru olması için m nin alacağı değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

    A) $\{m \mid -1 < m < 2, m \in R\}$ B) $\{m \mid -3 < m < 1, m \in R\}$
    C) $\{m \mid -3 \leq m < 2, m \in R\}$ D) $\{m \mid -3 \leq m \leq 1, m \in R\}$
    E) $\{m \mid -3 \leq m \leq 1, m \in R\}$

16. $(m-3)x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0$ denkleminin köklerinin ters işaretli olması için m aşağıdaki aralıklardan hangisinde olmalıdır?

    A) $(-1,2)$ B) $(-1,3)$ C) $(0,4)$ D) $(2,3)$ E) $[2,4)$

17. $x^2 - (m-1)x + m - 2 = 0$ denkleminin pozitif işaretli iki kökü olması için m ne olmalıdır?

    A) $m > 1$ B) $m > 1$ C) $m < 2$ D) $1 < m < 2$ E) $m > 2$

18. $mx^2 + 6(m-2)x + 3(m-8) = 0$ denkleminin mutlak değerce eşit ters işaretli iki kökü olması için m kaç olmalıdır?

    A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

19. $-x^2 + mx + 4 < 0$ eşitsizliğinin daima doğru olması için m hangi aralıkta olmalıdır?

    A) $[-4,0)$ B) $[-4,4)$ C) $(-4,4)$ D) $[2,4)$ E) $[-4,4]$

20. $(m-6)x^2 - 2mx - m < 0$ eşitsizliğinin daima doğru olması için m hangi aralıkta olmalıdır?

    A) $[0,1)$ B) $[0,1]$ C) $(0,3)$ D) $[1,3)$ E) (36)

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR

$a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlara $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonlar** denir. Bu tür fonksiyonlar,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f : x \to ax^2 + bx + c$$

veya

$$f = \{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c, x \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad a \neq 0\}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $f(x)$ üçterimlisinin katsayıları olan $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ nin farklı değerleri için değişik fonksiyonlar elde edilir.

Örneğin:
1) $a = -2, b = 3$ ve $c = 1$ ise $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$
2) $a = \sqrt{3}, b = 0$ ve $c = 3$ ise $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 3$
3) $a = 1, b = 5$ ve $c = 0$ ise $f(x) = x^2 + 5x$
4) $a = 4, b = 0$ ve $c = 0$ ise $f(x) = 4x^2$
olur.

Bu bölümde ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerini çizeceğiz.

$$f = \{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c, a, b, c, x \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad a \neq 0\}$$

kümesinin elemanları olan ikililere analitik düzlemde karşılık gelen noktalara f **fonksiyonunun grafiği** denir. İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafikleri **parabol** denen eğrilerdir.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

fonksiyonunda $b = 0$ ve $c = 0$ alınırsa,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2$$

fonksiyonu elde edilir. *Bu fonksiyonun grafiğini çizelim.*

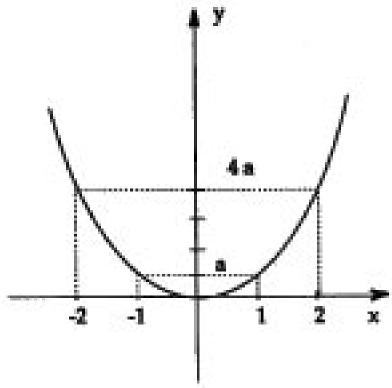
$y = f(x) = ax^2$ fonksiyonunda x'in her değeri için y'nin aldığı değerler hesaplanabilir. x'in aldığı değişik değerlere karşılık y

nin alacağı değerleri gösteren bir tablo yapalım. Buna fonksiyonun değişim tablosu diyeceğiz.

Tablodaki (x, y) ikililerine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar yardımıyla f fonksiyonunun grafiği kabaca çizilir.

1. $a > 0$ ise;

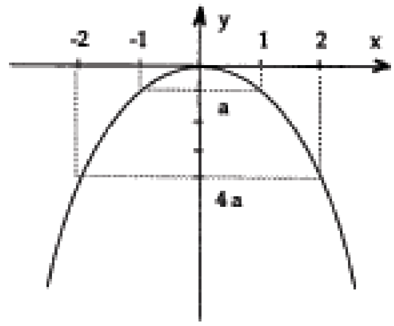
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2$	$+\infty$	$\searrow$	4a	$\searrow$	a	$\searrow$	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	4a	$\nearrow$	$+\infty$



$\forall x \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = ax^2 \geq 0$ olduğundan, parabolün kolları OY ekseninin pozitif yönündedir ve fonksiyonun aldığı en küçük değer $x = 0$ için $y = 0$ dır. Buna göre fonksiyonun görüntü kümesi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olur. Bu durumda (0,0) noktası parabolün en alt noktasıdır. Bu noktaya **parabolün tepesi** denir.

2. $a < 0$ ise;

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2$	$-\infty$	$\nearrow$	4a	$\nearrow$	a	$\nearrow$	0	$\searrow$	a	$\searrow$	4a	$\searrow$	$-\infty$



$\forall x \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = ax^2 \leq 0$ olduğundan, parabolün kolları OY ekseninin negatif yönündedir ve fonksiyonun aldığı en büyük değer $x = 0$ için $y = 0$ dır. Buna göre fonksiyonun görüntü kümesi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ dır. Eğrinin en yüksek noktası olan (0,0) noktasının **parabolün tepesi** olduğunu gördünüz mü?

$y = ax^2$ fonksiyonunun *değişim tablosunu* inceleyiniz.

Burada,

$$x = \pm 1 \quad \text{için} \quad y = a$$

$$x = \pm 2 \quad \text{için} \quad y = 4a$$

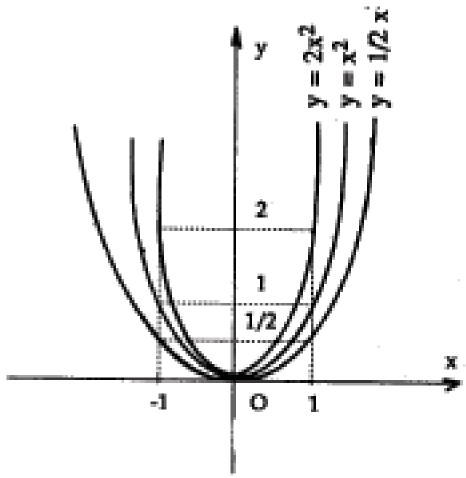
olduğunu görürüz. $(-1, a)$ ile $(1, a)$ ve $(-2, a)$ ile $(2, a)$ noktaları OY eksenine göre simetrik midir? Genel olarak x'in aldığı $(-c)$ ve (c) değerlerine y'nin aynı $(y = ac^2)$ değeri karşılık gelir. Bu da bize $(-c, ac^2)$ ve (c, ac^2) noktalarının OY eksenine göre simetrik olduğunu gösterir. O halde, OY ekseni ($x = 0$ doğrusu) fonksiyonun grafiğinin (parabolün) **simetri ekseni**dir.

Örnekler:

1. $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$ ve $a = 2$ için $y = ax^2$ kuralı ile tanımlanmış fonksiyonların grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi, $a > 0$ için,

- a büyüdükçe parabolün kolları OY eksenine yaklaşır,
- a küçüldükçe parabolün kolları OY ekseninden uzaklaşır.

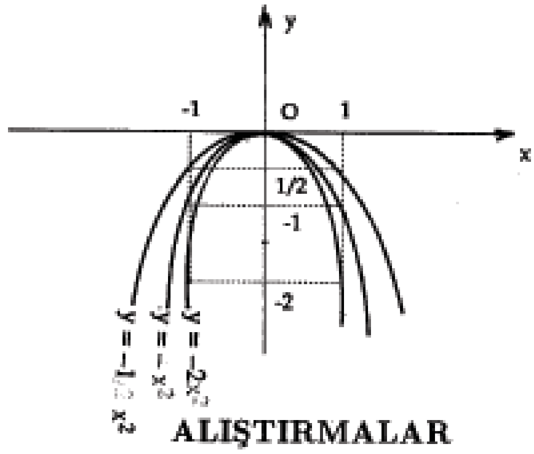


2. $y = -\frac{1}{2}x^2; y = -x^2; y = -2x^2$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

$a < 0$ için,

a büyüdükçe parabolün kolları OY ekseninden uzaklaşır,

a küçüldükçe parabolün kolları OY eksenine yaklaşır.



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

   a) $y = 4x^2$ b) $y = -4x^2$ c) $y = \frac{1}{4}x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiğinin aşağıdaki noktalardan geçmesi için a ne olmalıdır.

   a) $(-1, 1)$ b) $(1, 2)$ c) $(-2, \frac{3}{4})$ d) $(-3, -3)$

3. Aşağıdaki noktalardan, $y = \frac{3}{4}x^2$ fonksiyonun grafiği üzerinde olanları bulunuz.

   a) $(-1, \frac{3}{2})$ b) $(2, 3)$ c) $(3, \frac{3}{4})$ d) $(1, \frac{3}{4})$

4. $\{-3, -1, 0, \frac{1}{3}, 3\}$ kümesinin, $f : R \to R, f(x) = 3x^2$ fonksiyonundaki görüntü kümesini bulunuz.

$\mathbf{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c}$ Fonksiyonunun Grafiği

Bu tür fonksiyonların grafiklerinin parabol denen eğriler olduğunu biliyoruz. İkinci dereceden bir değişkenli bir fonksiyonun grafiğini çizebilmek için yapılması gerekli işlemleri aşağıdaki biçimde sıralayabiliriz:

- Parabolün tepe noktasının koordinatları bulunur.
- Parabolün koordinat eksenlerini kestiği noktaların (varsa) koordinatları bulunur.
- Fonksiyonun değişim tablosu yapılır.
- Değişim tablosundan yararlanarak fonksiyonun grafiği çizilir.

1.
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (I)$$

fonksiyonu,

$$\begin{aligned} y &= a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}] \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

ya da

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

biçiminde yazılabilir.

$$x + \frac{b}{2a} = x_1 \quad \text{ve} \quad y - \frac{4ac - b^2}{4a} = y_1 \qquad (II)$$

dersek, verilen fonksiyon,

$$y_1 = ax_1^2$$

biçimini alır.

$y = ax^2$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerinin tepe noktası $(0,0)$ olan bir parabol olduğunu biliyoruz. Buna göre, $x_1 = 0$ ve $y_1 = 0$ değerleri (II) eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \text{ve} \quad y - \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

ya da

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{ve} \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

olur. Bu da bize $y_1 = ax_1^2$ fonksiyonunun grafiğinin, tepe noktası $(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}, \frac{\mathbf{4ac - b^2}}{\mathbf{4a}})$ olan bir parabol olduğunu gösterir.

Denklemi $y = ax^2$ olan parabolün simetri ekseninin $x = 0$ doğrusu olduğunu görmüştük. Buna göre $x_1 = 0$ değerini (II) eşitliğinde yerine yazarsak $\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} = 0$ veya $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$ doğrusu da denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olan parabolün **simetri ekseni** olur.

$a > 0$ ise, grafiğin kolları OY eksininin pozitif yönünde olacağından parabolün tepe noktası en alt noktasıdır. Tepe noktasının ordinatı olan $\frac{4ac - b^2}{4a}$ sayısı da görüntü kümesinin **en küçük** elemanıdır.

$a < 0$ ise; grafiğin kolları OY ekseninin negatif yönünde olacağından parabolün tepe noktası en üst noktasıdır ve tepe noktasının ordinatı olan $\frac{4ac - b^2}{4a}$ sayısı da görüntü kümesinin **en büyük** elemanıdır.

2. Grafiğin OX eksenini kestiği noktalarda $y = 0$ olduğundan,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

olur.

$b^2 - 4ac > 0$ ise, grafik, OX eksinini $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ gibi iki noktada keser.

$b^2 - 4ac = 0$ ise, grafik Ox eksenine teğettir.

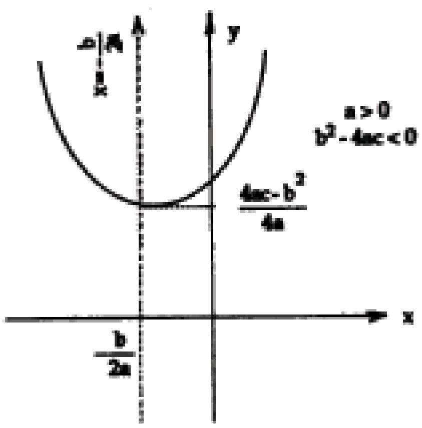
$b^2 - 4ac < 0$ ise, grafik Ox eksenini kesmez.

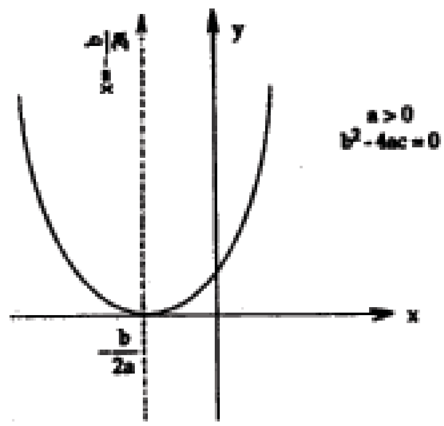
Grafiğin OY eksenini kestiği noktada $x = 0$ olacağından $y = c$ olur. Buna göre grafik OY eksenini $(0, c)$ noktasında keser.

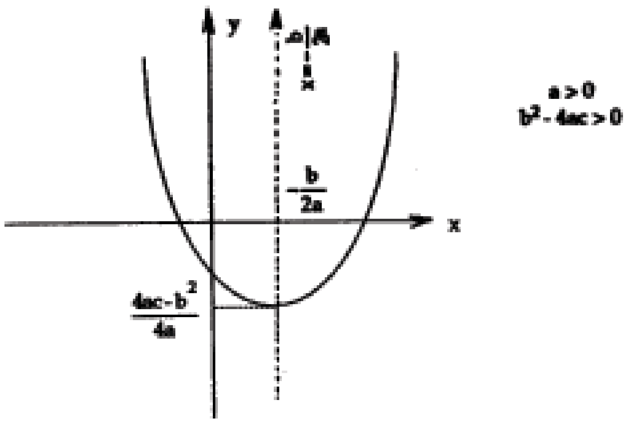
3. $a > 0$ ise,

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ dır.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$
			Tepe noktası		



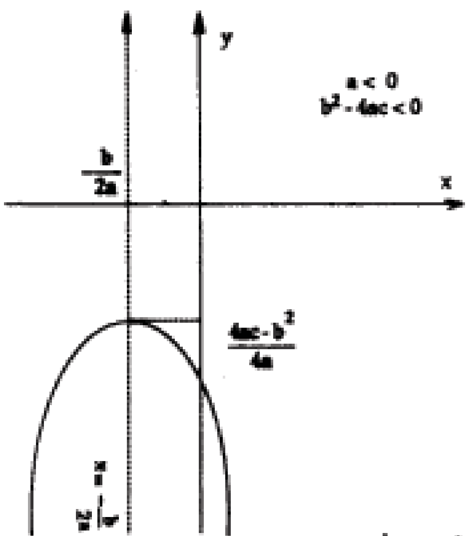


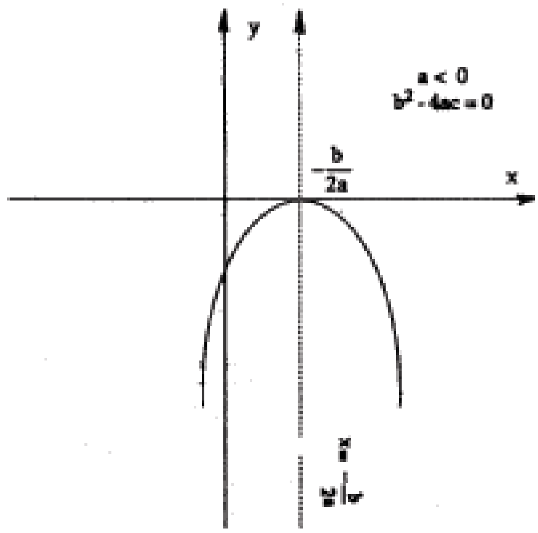


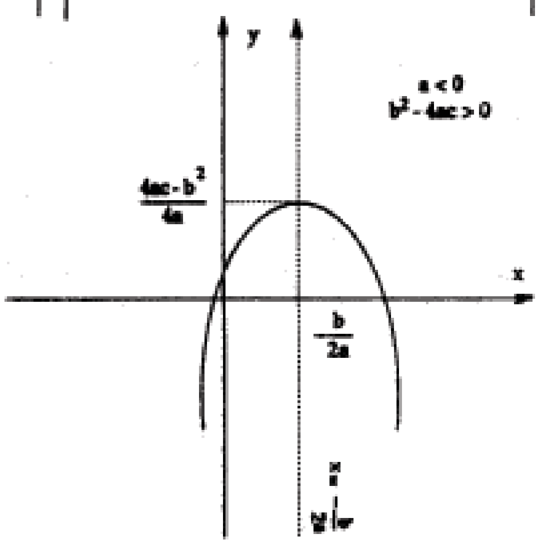
$a < 0$ ise,

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $a(+\frac{b}{2a})^2 \leq 0$ dır.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$
			Tepe noktası		







$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

ifadesinde,

$$r = -\frac{b}{2a} \quad \text{ve} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

diyecek olursak,

Parabolün denklemi $y = a(x - r)^2 + k$ ve tepe noktası ise $T(r, k)$ olur.

Örnekler:

1. $y = x^2 - 8x + 12$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Grafiğin tepe noktasının koordinatları,

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2} = 4$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.1.12 - (-8)^2}{4.1} = -4$$

Eğrinin OX eksinini kestiği noktalar:

$y = 0$ için,

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$$

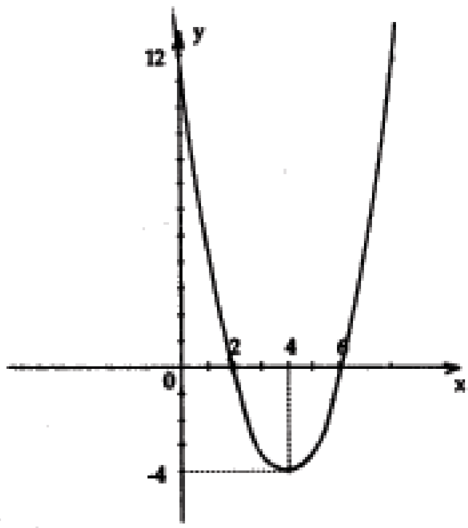
$$(2, 0) \quad \text{ve} \quad (6, 0)$$

dır.

Eğrinin OY eksinini kestiği nokta:

$x = 0$ için $y = 12$ olduğundan, $(0, 12)$ dir. Öyleyse, değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		0		2		4		6		$+\infty$
$y = x^2 - 8x + 12$	$+\infty$	$\searrow$	12	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2. $y = f(x) = \frac{-1}{3}x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Eğrinin tepe noktasının koordinatları,

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-\frac{1}{3})} = 3$$

$r = 3$ değeri, verilen fonksiyonda x yerine yazılırsa, tepe noktasının ordinatı bulunur.

$$k = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{1}{3}.3^2 + 2.3 + 3 = 6$$

olur.

Eğrinin eksenleri kestiği noktalar: $y = 0$ için,

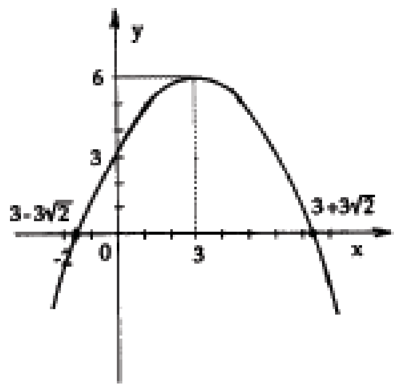
$$-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 3 + 3\sqrt{2}$$

$$(3 - 3\sqrt{2}, 0) \quad \text{ve} \quad (3 + 3\sqrt{2}, 0)$$

dır.

$x = 0$ için $y = 3$ olur. Eğri $(0, 3)$ noktasından geçer. Öyleyse, değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		$3-3\sqrt{2}$		0		3		$3+3\sqrt{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



3. $y = x^2 + 4x + 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

4. $y = -(x-2)^2 + 4$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Parabolün tepe noktasının koordinatları,

$$y = a(x-r)^2 + k$$

ifadesinden

$$r = 2 \quad \text{ve} \quad k = 4$$

olarak bulunur.

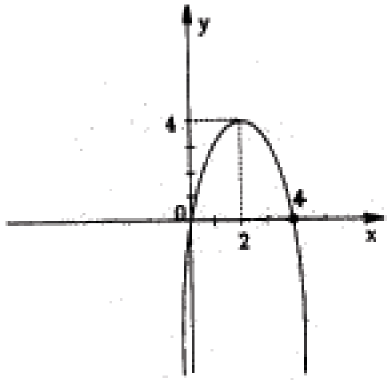
Parabolün eksenleri kestiği noktalar:

$y = 0$ için,

$$\begin{aligned} -(x-2)^2 + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 2 = \pm 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

ve $x = 0$ için $y = 0$ olur. Öyleyse, değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



5. OX eksinini $A(2,0)$ ve $B(6,0)$ noktalarında, OY eksinini $C(0,12)$ noktasında kesen parabolün denklemini bulalım.

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği (parabol) A, B ve C noktalarından geçtiğine göre bu noktaların koordinatları parabol denklemini sağlamalıdır.

(1) $A(2,0)$ için $a.2^2 + b.2 + c = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$

(2) $B(6,0)$ için $a.6^2 + b.6 + c = 0 \Rightarrow 36a + 6b + c = 0$

(3) $C(0,12)$ için $a.0^2 + b.0 + c = 12 \Rightarrow c = 12$

(1) ve (2) den,

$$\begin{aligned} 4a + 2b + 12 = 0 \Rightarrow &\quad 2a + b + 6 = 0, \\ 36a + 6b + 12 = 0 \Rightarrow &\quad \mp 6a \mp b \mp 2 = 0 \\ \hline &\quad -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

ve

$$2a + b + 6 = 0 \Rightarrow b = -8$$

bulunur. Parabolün denklemi ise,

$$y = x^2 - 8x + 12$$

olur.

6. Tepe noktası $T(-1,-2)$ olan ve $A(-2,1)$ noktasından geçen parabolün denklemini bulalım.

Parabolün tepe noktasının $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$-\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \tag{1}$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a} = -2 \Rightarrow 4ac - b^2 = -8a \tag{2}$$

$$4ac - b^2 = -8a \wedge b = 2a \Rightarrow 4ac - 4a^2 + 8a = 0 \tag{3}$$

Parabol A noktasından geçtiğine göre, A noktasının koordinatları parabol denklemini sağlar.

$$a(-2)^2 + b(-2) + c = 1 \Rightarrow 4a - 2b + c = 1$$

$$4a - 2b + c = 1 \wedge b = 2a \Rightarrow c = 1$$

olur.

$$\begin{aligned} 4ac - 4a^2 + 8a = 0 \wedge c = 1 \quad &\Rightarrow \quad 4a - 4a^2 + 8a = 0 \\ &\Rightarrow \quad -4a^2 + 12a = 0 \\ &\Rightarrow \quad a = 0 \vee a = 3 \end{aligned}$$

$a = 0$ olamaz. Çünkü, denklem parabol denklemi olamaz.

$$a = 3 \wedge b = 2a \Rightarrow b = 6$$

bulunur.

İstenen parabol denklemi ise,

$$y = 3x^2 + 6x + 1$$

dir.

7. $y = (m-2)x^2 - 2mx + m + 2$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanının (-2) olması için m'nin alacağı değeri bulalım ve m'nin değerini yerine yazarak elde edeceğimiz parabolün grafiğini çizelim.

Görüntü kümesinin en küçük (veya en büyük) elemanı tepe noktasının ordinatıdır.

Buna göre;

$$\frac{4ac-b^2}{4a} = k \text{ dan,}$$

$$\frac{4(m+2)(m-2)-4m^2}{4(m-2)} = -2 \Rightarrow \frac{4m^2-16-4m^2}{4(m-2)} = -2$$
$$\Rightarrow \frac{-4}{m-2} = -2$$
$$\Rightarrow m = 4$$

bulunur. Parabolün denklemi ise,

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

olur.

Parabolün tepe noktasının koordinatları,

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2.2} = 2$$

$$k = f(2) = 2.2^2 - 8.2 + 6 = -2$$

dir.

Parabolün eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0$ için $y = 6$

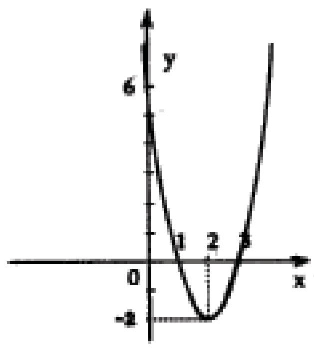
ve

$y = 0$ için $2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

olur.

Öyleyse, değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



8. $y = mx^2 - 2(m-1)x + m - 3$ fonksiyonunun grafiğinin OX eksenine teğet olması için m'nin alacağı değeri hesaplayalım ve m'nin bulduğumuz değerini yerine yazarak, fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Fonksiyonun grafiğinin OX eksenine teget olması için $\Delta = 0$ olmalıdır. Buradan,

$$[-2(m-1)]^2 - 4m(m-3) = 0 \Rightarrow 4m + 4 = 0$$
$$\Rightarrow m = -1$$

bulunur. Ohalde, parabolün denklemi

$$y = -x^2 + 4x - 4$$

olur. Parabolün tepe noktasının koordinatları

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

$$k = f(2) = 0$$

dır.

Parabolün eksenleri kestiği noktalar:

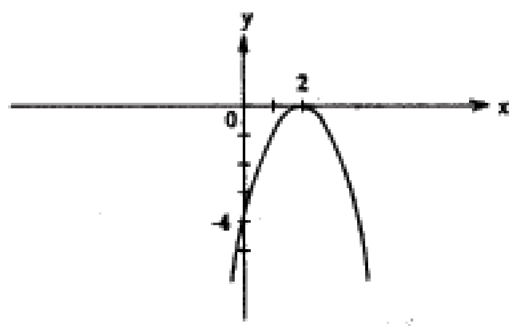
$x = 0$ için $y = -4$ ve

$y = 0$ için $-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$

olur.

Öyleyse, değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$+\infty$		0		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



ALIŞTIRMALAR

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

   a) $y = x^2 - 4$ b) $y = 2x^2 + 3x$
   c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ d) $y = -4x^2 + 1$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

   a) $y = (x-2)^2$ b) $y = -2(x+3)^2$
   c) $y = x^2 - 7x + 10$ d) $y = -2x^2 + 8x - 5$
   e) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ f) $y = -(x + \frac{3}{2})^2 - 2$

3. Aşağıda tepe noktası T ile üzerindeki bir A noktası verilen parabollerin denklemini yazınız.

   a) $T(6,1)$, $A(0,-8)$ b) $T(-3,4)$ $A(-2,9)$

4. Aşağıdaki noktalardan geçen parabollerin denklemlerini yazınız.

   a) $A(-1,0), B(3,0), C(0,3)$ b) $A(-1,0), B(1,0), C(0,-1)$

5. Tepe noktası $T(1,8)$ olan ve $A(0,17)$ noktasından geçen parabolün denklemini bulunuz ve grafiğini çiziniz.

6. $y = x^2 - 2(m-1)x + m(m-1) - 1$ fonksiyonunun grafiğinin OX eksenine teğet olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

7. $y = mx^2 - 2(2m-1)x + 2m + 1$ fonksiyonunun grafiğinin
   a) $A(2,-5)$ noktasından geçmesi için m'nin alacağı değeri bulunuz.
   b) m'nin bulunan değerini yerine yazarak elde edeceğiniz fonksiyonun grafiğini çiziniz.

8. $y = (m+2)x^2 + 4mx + 2m + 3$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanının $\frac{1}{3}$ olması için $m \in \mathbb{Z}$ ne olmalıdır. m'nin bulunan değerini yerine yazarak bulacağınız fonksiyonun grafiğini çiziniz.

9. $y = x^2 + (m-1)x - m$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin simetri eksininin $x + 1 = 0$ doğrusu olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

Eşitsizlik Sistemlerinin Grafikle Çözümü

Bu bölümde birinci ve ikinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerinin, grafiklerden yararlanarak analitik düzlemde nasıl gösterileceğini göreceğiz.

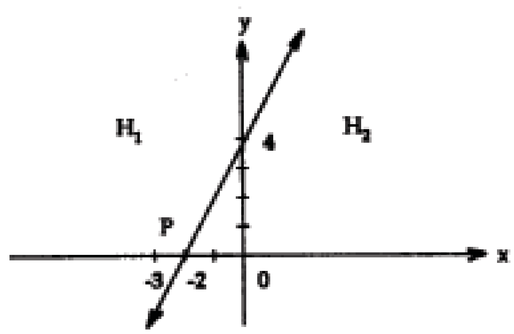
Bu yöntemi eşitsizliklerin grafiklerinin birer doğru veya paraboller olması durumunda uygulayacağız.

Örnekler:

1. $y - 2x - 4 \geq 0,$
   $y - 3x - 6 \leq 0$

   eşitsizlik sistemini sağlayan noktalar kümesini analitik düzlemde gösterelim:

   Önce $y - 2x - 4 = 0$ doğrusunun grafiğini çizelim.

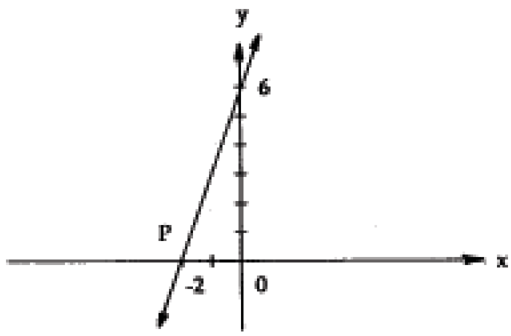


Bu doğru düzlemi H_1 ve H_2 gibi iki yarı düzleme ayırır. H_1 yarı düzlemi içinde bir $P(-3,0)$ noktası alalım ve bu noktanın koordinatlarının eşitsizliği sağlayıp sağlamadığına bakalım.

$0 - 2(-3) - 4 = 2 > 0$ olduğundan,

$P(-3,0)$ noktasının içinde bulunduğu H_1 yarı düzlemi aranan bölgedir. H_1 yarı düzlemindeki bütün noktalar $y - 2x - 4 > 0$ eşitsizliğini sağlar.

Şimdi de $y - 3x - 6 = 0$ doğrusunun grafiğini, ayrı bir şekil üzerinde çizelim.



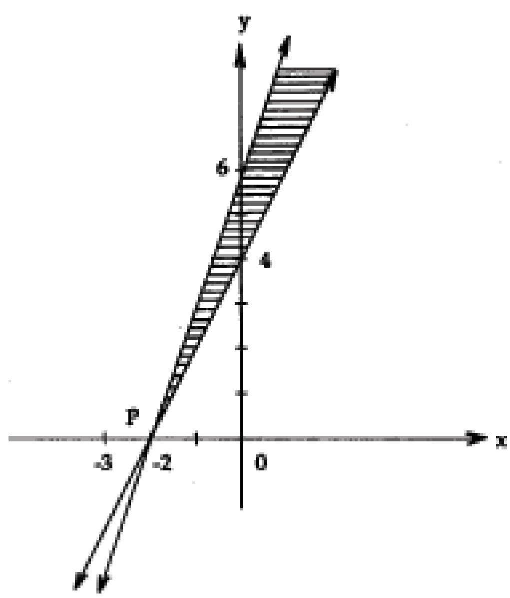
$0(0,0)$ noktasının koordinatlarını $y - 3x - 6 < 0$ eşitsizliğinde yerlerine yazalım.

$0 - 3.0 - 6 < 0 \Rightarrow -6 < 0$ olduğundan,

$0(0,0)$ noktası $y - 3x - 6 < 0$ eşitsizliğini sağlar. Buna göre $0(0,0)$ noktasını içinde bulunduran bölge aranan bölgedir.

Yukarıdaki iki bölgenin arakesiti, eşitsizlik sistemini sağlayan noktaların kümesidir.

Her iki eşitsizliği sağlayan (noktalar kümesi) bölge, aşağıdaki grafikte koyu taranmıştır.



2. $y \leq 2 - x - x^2$
   $x + 2y + 2 > 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösterelim.

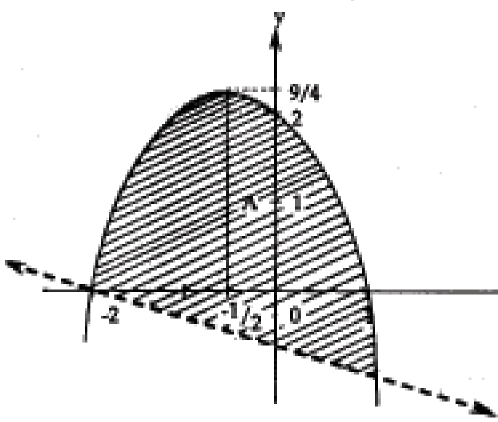
$y = -x^2 - x + 2$ parabolünün grafiğini çizelim.

$$\left.\begin{array}{l} r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2} \\ k = f(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) + 2 = \frac{9}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow T(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$$

$x = 0$ için $y = 2$

$y = 0$ için $-x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -2$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Bu parabol düzlemi üç ayrık bölgeye ayırır. Parabolün iç bölgesindeki 0(0,0) noktası için,

$$0 \leq 2 - 0 - 0 \Rightarrow 0 \leq 2$$

eşitsizliği doğrudur. Buna göre parabolün iç bölgesindeki bütün noktalar için, $y \leq 2 - x - x^2$ eşitsizliği sağlanır.

$x + 2y - 2 > 0$ eşitsizliği için 0(0,0) noktasını alalım.

$$0 + 2.0 + 2 > 0 \Rightarrow 2 > 0$$

eşitsizliği doğru olduğuna göre başlangıç noktası tarafındaki yarı düzlem aranan bölgedir (Kesik çizgi doğru üzerindeki noktaların çözüm kümesine ait olmadığını gösterir).

Eşitsizlik sistemini sağlayan bölge grafikte taranarak gösterilmiştir.

3. $\begin{aligned} y &> x^2 - 1 \\ y &\geq 2x - x^2 \end{aligned}$

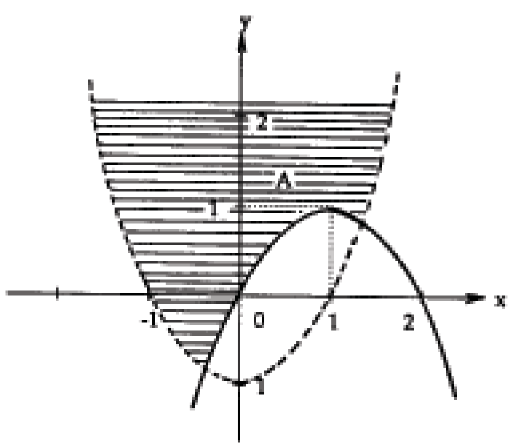
eşitsizlik sistemini sağlayan noktaları analitik düzlemde gösterelim.

$$y = x^2 - 1 \quad \text{ve} \quad y = 2x - x^2$$

parabollerinin grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



$y = x^2 - 1$ parabolünün iç bölgesindeki 0(0,0) noktası için,

$$0 > 0^2 - 1 \Rightarrow 0 > -1$$

eşitsizliği doğru olduğundan, parabolün iç bölgesindeki bütün noktalar için $y > x^2 - 1$ eşitsizliği doğrudur.

$y = 2x^2 - x^2$ parabolünün dış bölgesindeki $A(0,1)$ noktası için,

$$1 > 2.0 - 0^2 \Rightarrow 1 > 0$$

olduğundan, bu bölgedeki bütün noktalar $y \geq 2x - x^2$ eşitsizliğini sağlar.

Buna göre, birinci parabolün iç bölgesi ile ikinci parabolün dış bölgesinin arakesiti aranan bölgedir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

1)	$2x + y \geq 1$ $x - y < 3$	2)	$2x + y \geq -1$ $2x + y < 4$
3)	$y > x^2$ $y + x < 3$	4)	$x^2 - 3x - y - 4 \leq 0$ $5x - x^2 - y + 6 \geq 0$
7)	$y \leq 4x - x^2$ $y - x > 0$	8)	$y \leq -2x^2 + x + 6$ $y > x^2 - 5x + 4$

DEĞERLENDİRME SORULARI 6

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonun grafiği $(\sqrt{3}, -6)$ noktasından geçtiğine göre a kaçtır?

   A) -6 B) -3 C) -2 D) 2 E) 3

2. $\{-2, -1, 0\}$ kümesinin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 - 1$ eşitliği ile tanımlı fonksiyondaki görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $\{-13, -5, -4\}$ B) $\{-13, -4, -1\}$ C) $\{-5, -4, -1\}$
   D) $\{-13, -1, 4\}$ E) $\{-4, -1, 5\}$

3. $f(x) = x^2 + 4x + 4$ eşitliği ile verilen fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasının apsisi kaçtır?

   A) -4 B) -2 C) 0 D) 1 E) 2

4. $f(x) = -x^2 + 4x - 8$ eşitliği ile verilen fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasının ordinatı kaçtır?

   A) -20 B) -8 C) -4 D) 0 E) 4

5. $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{2}$ parabolünün simetri ekseni aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $4x + 5 = 0$ B) $x = \frac{5}{2}$ C) $x = -\frac{7}{6}$
   D) $x = -\frac{5}{18}$ E) $x = \frac{21}{5}$

6. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ parabolünün Oy eksenine göre simetriğinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $y = x^2 - 2x + 3$ B) $y = -x^2 - 2x - 3$ C) $y = -x^2 + 2x + 3$
   D) $y = x^2 + 2x + 3$ E) $y = x^2 + 2x - 3$

7. $y = x^2 - 2x + m - 5$ parabolünün $y = 2$ doğrusuna teğet olması için m kaç olmalıdır?

   A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8. $(2, 0)$ noktasında Ox eksenine teğet olan ve $(1, 1)$ noktasından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $y = -2(x+2)^2$ B) $y = (x-2)^2$ C) $y = 2(x-2)^2$
   D) $y = (x+2)^2$ E) $y = x^2 + 4x + 4$

9. $f(x) = mx^2 + (2m-1)x + m - 7$ fonksiyonunun grafiğinin Ox eksenini $(1,0)$ noktasında kesmesi için m kaç olmalıdır?
A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

10. $f(x) = 2x^2 - mx$ parabolü ile $y = 3x - 2$ doğrusunun kesişmemesi için m hangi aralıkta olmalıdır?
A) $-7 < m < 1$ ' B) $-1 \leq m \leq 7$ C) $-1 < m < 7$
D) $2 < m < 3$ E) $1 < m < 7$

11. $y = 3x^2 - 4(m-2)x + m + 5$ parabolünün tepe noktasının Oy ekseni üzerinde olması için m kaç olmalıdır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

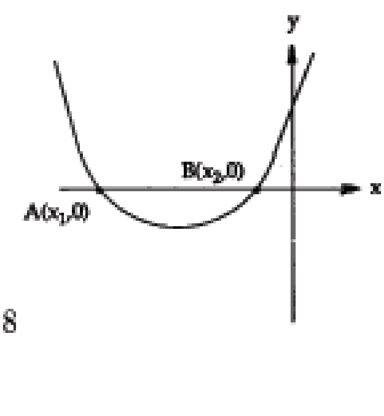
12. $f(x) = x^2 - (m-3)x - 2m + 3$ parabolünün Ox eksenini kesmemesi için m hangi aralıkta olmalıdır?
A) $-3 < m < 1$ B) $-3 < m < 2$ C) $-1 < m < 3$
D) $2 < m < 3$ E) $\frac{2}{3} < m < 2$

13. $f(x) = mx^2 + 2x + 2$ eşitliği ile verilen fonksiyonun görüntü kümesinin en küçük elemanının $\frac{1}{3}$ olması için m kaç olmalıdır?
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 4 E) 7

14. $y = mx^2 + 4x + 4$ eşitliği ile verilen parabolün görüntü kümesinin en küçük değerinin olmadığı bilindiğine göre m için aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?
A) $m > 0$ B) $m > 1$ C) $m < 1$ D) $m < 0$ E) $m > 2$

15. $f(x) = (m-2)x^2 - 2(2m-5)x + m - 4$ parabolünün tepe noktasının $x = 1$ doğrusu üzerinde olması için m kaç olmalıdır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. Yanda grafiği görülen $f(x) = x^2 + 6x + m$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonu için $2x_2 = x_1$ ise m aşağıdakilerden hangisidir?

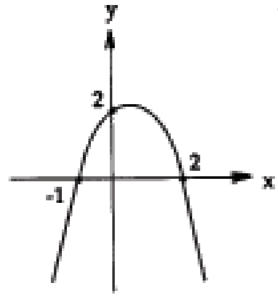


A) -4 B) -2 C) 0 D) E E) 8

17. $m \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $f(x) = mx^2 - 4x + m - 1$ parabolünün tepe noktasının ordinatı 2 ise apsisi kaçtır?

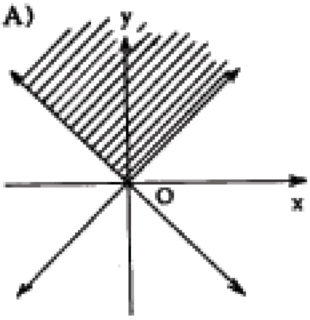
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

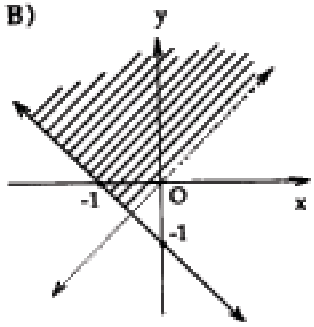
18. Yandaki grafik $y = ax^2 + bx + c$ ile belirlendiğine göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

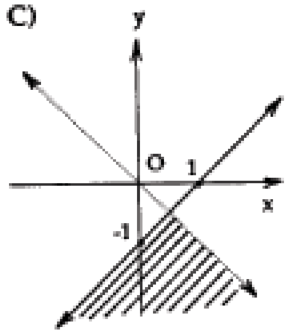


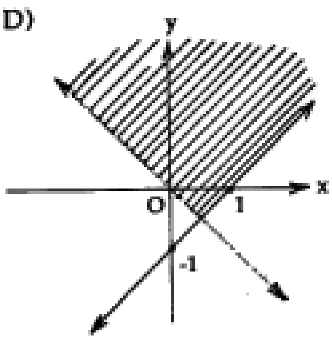
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

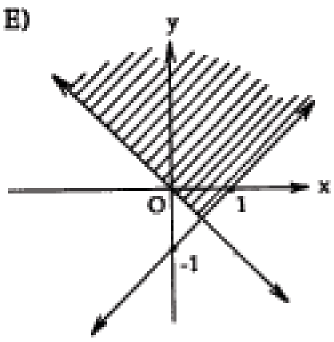
19. $A = \{(x, y) \mid 2x + y > 0, x - y \leq 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsü aşağıdaki grafiklerde görülen taralı bölgelerden hangisidir?

A)


B)


C)


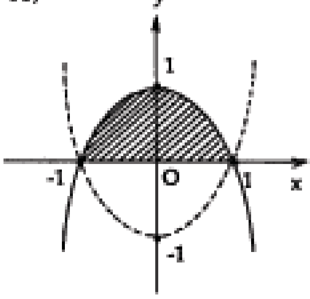
D)


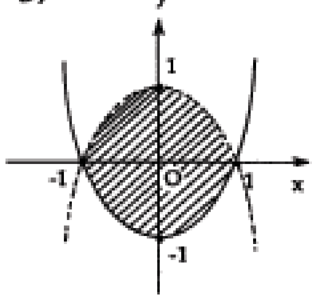
E)


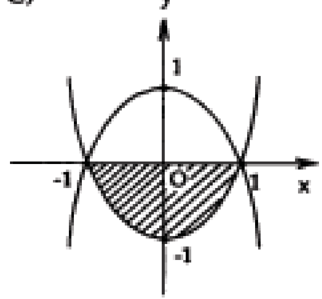
20.

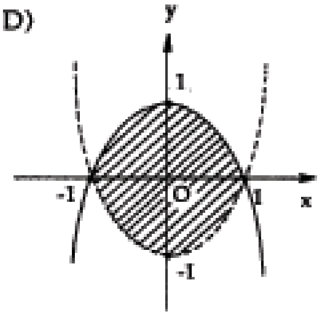
$$\left.\begin{array}{l} y \leq 1 - x^2 \\ y > x^2 - 1 \end{array}\right\}$$

eşitsizlik sisteminin grafikle çözümü aşağıdaki taralı bölgelerden hangisinde verilmiştir?

A)


B)


C)


D)


E)