ÜNİTE III

LİNEER CEBİR

MATRİSLER

- Matrisin
- İki matrisin eşitliği
- Toplama işlemi ve özellikleri
- Matrislerde skalarla çarpma işlemi ve özellikleri
- Matrislerde çarpma işlemi
- Çarpma işlemine göre birim matris
- Kare matris
- Matrislerde çarpma işleminin özellikleri
- Kare matrisin kuvvetleri
- Bir matrisin çarpma işlemine göre tersi
- Matrislerde transpoz (Devrik) işlemi
- Matrislerde transpoz (Devrik) işlemin özellikleri

DETERMİNANTLAR

- Determinant
- Sarus kuralı
- Determinantların özellikleri
- Lineer Dönüşümler
- Örnekler

BU BÖLÜM NELERİ AMAÇLIYOR?

Bu bölümü çalıştığınızda (bitirdiğinizde)

* Matrisin tanımını kavrayacak,
* İki matrisin eşit olup olmadığını işlem yaparak görecek,
* Matrislerde toplama, çıkarma, çarpma işlemlerinin nasıl yapıldığını öğrenecek,
* Birim ve kare matrisi tanıyacak,
* Kare kuvvetini almayı öğrenecek,
* Bir matrisin çarpma işlemine göre tersini alacak,
* Matrislerde devrik işlemini tanıyacak
* Determinantın devrik işlemini tanıyacak,
* Determinantın tanımını kavrayacak,
* Minör ve kofaktör tanımlarını öğrenecek,
* Sarrus kuralı ile determinant hesabını öğrenecek,
* Determinantın özelliklerini kavrayacak, ilgili örnekleri çözmeyi öğreneceksiniz.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Tanımları dikkatli okuyunuz,
* Çözülen örnekleri yazarak çalışın sürekli neden, niçin sorularını kendinize sorun,
* Bölüm sonundaki değerlendirme sorularını çözün.

MATRİSLER

Günlük yaşantımızda sayıların, değişkenlerin veya parametrelerin oluşturduğu çeşitli tablolar yapmaya ihtiyaç duyarız. Örneğin bir fabrikanın ürettiği dört tür malın ilk beş aylık üretim miktarlarının aylara göre dökümünün verilmesi istenirse, bunu göstermenin yolu dört satır ve beş sütundan oluşan bir tablo hazırlanmaktadır. Satırların karşısına mal çeşitlerini, sütunların tepesine de aylar yazılırsa, bir satır ile bir sütun kesiştiği yere de o ay içinde üretilen o malın miktarı yazılır. Bu tabloya üretim matrisi denir.

	Ocak	**Şubat**	**Mart**	**Nisan**	**Mayıs**
Beyaz peynir	300	310	380	400	450
Kaşar peyniri	250	200	250	220	300
Tereyağ	200	200	120	200	250
Kaymak	250	200	300	300	200

Dört satır, beş sütundan oluşan bu tablo, hangi malın hangi ay ne miktarda üretildiğini göstermektedir.

Sayıların, değişkenlerin veya parametrelerin oluşturduğu dikdörtgen biçiminde bir tabloya bir matris denir.

Bir matrisi oluşturan nesnelere o matrisin elemanları denir. Yatay çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlarına matrisin satırları, düşey çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlara matrisin sütunları denir.

m *sayısına matrisin satır sayısı*

n *sayısına matrisin sütun sayısı*

m *satır ve* ***n*** *sütundan oluşan matrise*

mxn *türünde bir matris denir. Matrisler genelde*

büyük harfler ile gösterilir.

1 satır ve n sütunden oluşan matrise satır matrisi

1 sütün ve m satırdan oluşan matrisde sütun matrisi denir.

Örneğin $A = [a_{11} \;\; a_{12} \; ... \; a_{1n}]_{1xn}$ *matrisi 1xn türünden satır matrisidir,*

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{mx1}$$ matrisi mx1 türünden sütun matrisidir.

Örnek : $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin türü ve eleman sayısını nedir?

Çözüm : A matrisi 2 satır 3 sütundan (kolondan) oluştuğundan 2x3 tipinde bir matristir.

Bu matrisin eleman sayısı 2x3 = 6 dır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisine göre

$a_{11} + a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} = ?$

Çözüm : $a_{11} = 1$ (1. satır 1. kolona bak.)

$a_{21} = -1$ (2. satır 1. kolona bak.)

$a_{32} = 4$ (3. satır 2. kolona bak.)

$a_{13} = 3$ (1. satır 3. kolona bak.)

O halde,

$1 + (-1) \cdot 4 - 3$

$1 - 4 - 3 = -6$

$a_{ij} \neq a_{ji}$

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

Aynı tipden, $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ve $B = [b_{ij}]_{mxn}$ matrisleri verilsin. Eğer, $\forall$ i, j için ***$a_{ij} = b_{ij}$ oluyorsa A matrisi B matrisine eşittir denir ve A = B ile gösterilir.***

İki matrisin eşit olması için her iki matrisin satır ve sütun sayıları eşit olmalı, ayrıca, karşılıklı olarak, matris elamanları birbirine eşit olmalıdır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} x+y & -3 \\ 5 & y \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ z & 6 \end{bmatrix}$

A matrisi B matrisine eşit ise

$x - y + z = ?$

Çözüm : $x + y = 8$, $5 = z$, $y = 6$

$x = 2 \quad x - y + z$

$2 - 6 + 5 = 1$

MATRİSLERDE TOPLAMA İŞLEMİ

Aynı tipten iki matris, $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [bij]_{mxn}$ olsun.

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$

şeklinde tanımlanır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

A+B bulunamaz çünkü A matrisi 2x2 tipinde B matrisi 2x3 tipindedir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-1) \\ 3+2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ matrisinin, toplama işlemine göre tersi, $-A = [-a_{ij}]_{mxn}$ matrisidir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ matrisinin toplamaya göre tersi $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ olarak yazılır.

Bütün elemanları sıfır olan matrise sıfır matris denir.

MATRİSLERDE TOPLAMA İŞLEMİNİN ÖZELİKLERİ

Aynı tipden A, B, C matrisleri için.

1) Toplama işleminin değişme özeliği vardır, yani

$A + B = B + A$ dır.

2) Toplama işleminin birleşme özeliği vardır yani,

$(A + B) + C = A + (B + C)$

3) Sıfır matris, toplama işlemine göre, etkisiz elemandır yani,

$A + O = O + A = A$

4) A matrisinin toplama işlemine göre tersi -A matrisidir, yani

$A + (-A) = (-A) + A = O$

yukarıdaki özelikleri $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ile doğrulamak mümkündür.

MATRİSLERDE SKALARLA ÇARPMA İŞLEMİ VE ÖZELİKLERİ

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ $B = [b_{ij}]_{mxn}$ matrisler ve $p, q, \in R$ sabitleri (skalerleri) için aşağıdaki özelikler vardır.

1) $p.(A+B) = pA + pB$

2) $(p+q)A = pA + qA$

3) $p(qA) = (p.q)A$

yukarıdaki tanıma uygun olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

$p = 2$ $q = 3$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

Örneğin: 1. özelliği göstermek mümkündür.

$$p.(A+B) = 2.\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$pA + pB = 2.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Diğer özelliklerinin varlığını yukarıdaki örneği kullanarak görebiliriz.

$k \in R$ olmak üzere, bir A matrisi k gibi bir skaler ile çarpımı

k.A = A.k

Örneğin $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ise -3A nedir? dersek,

$$-3A = \begin{bmatrix} -3.2 & -3.3 & -3.8 \\ -3.5 & -3.4 & -3.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 & -24 \\ -15 & -12 & -18 \end{bmatrix}$$

MATRİSLERDE ÇARPMA İŞLEMİ

mxn tipinde $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ile nxp türünde, $B = [b_{jk}]_{nxp}$ matrisleri verilmiş olsun. A matrisinin i satırı ile B matrisinin k sütunundaki elemanlar karşılıklı olarak çarpılıp, bu çarpımlar toplanırsa, A.B matrisinin terimi elde edilir. Bu şekilde elde edilen mxp tipindeki $C = [c_{ik}]_{mxp}$ matrisinde, A matrisi ile B matrisinin çarpımı denir.

A ile B matrislerinin çarpılması için, A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olmalı.

Örneğin : A matrisi 3x2 tipinde bir matris

B matrisi 3x2 tipinde bir matris olsun.

A matrisi ile B matrisini çarpamayız çünkü, A matrisinin sütun sayısı 2, B matrisinin satır sayısı 3 dür. $2 \neq 3$

Matrislerde çarpma işleminin değişme özeliği yoktur. $A.B \neq B.A$ dir.

Yukarıdaki tanımı, kullanılmaya uygun olarak açarsak; öğrenciler tarafından daha iyi sonuç alınacağı kesindir. Yani

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \\ r & z \end{bmatrix}$$

matrisleri çarpalım.

$$A . B = \begin{bmatrix} a.m+b.p+c.r & a.n+bq+cz \\ d.m+e.p+f.r & d.n+e.q+f.z \end{bmatrix}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} (-1)(-2) + 2.4 & -1.(3) + 2.0 \\ 3.(-2) + 1.4 & 3.3 + 1.0 \\ 4.(-2) + 1.4 & 4.3 + 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki örneğe bakarak $A.B \neq B.A$ olduğunu gösterebilirsiniz.

A matrisi mxn tipinde B matrisi nxs tipinde ise oluşan çarpım matris mxs tipindedir.

Örnek : $A = [a_{ij}]_{3x4}$ $\quad B = [b_{ij}]_{4x6}$ tipinde iseler,

$[A.B]_{3x6}$ yani, 3x6 tipinde bir matris elde edilmiş olur.

ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE BİRİM MATRİS

mxm tipinde bir A matrisi için

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

oluyorsa, A matrisine m. sıradan birim matris denir ve I_n ile gösterilir.

KARE MATRİS : Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise denir. O hâlde çarpmaya göre birim matris karesel matrisdir. Aşağıdakilerin hepsi birim matrisidir. İnceleyiniz :

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}$ $\quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$

$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}$ $\quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5x5}$

$A.I_n = I_n.A$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A.I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 + 3.0 & 2.0 + 3.1 \\ 4.1 + 5.0 & 4.0 + 5.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRİSLERDE ÇARPMA İŞLEMİNİN ÖZELİKLERİ

A matrisi mxn tipinde B matrisi nxp tipde C matrisi pxs tipinde olmak üzere

1) A.B.C matrisi mxs tipinde bir matrisdir.

2) A. (B.C) = (A.B).C

3) A matrisi mxn tipinde, B ve C matrisleri nxp tipinde olmak üzere
A.(B+C) = A.B + A.C

4) A ve B matrisleri mxn tipinde, C matrisi nxp tipinde olmak üzere
(A+B).C = A.C + B.C

5) A matrisi mxn tipinde, B matrisi nxp tipinde ve K$\in$ R olmak üzere
k.(A.B) = (k.A). B = A.(k.B)

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

A.(B+C) = A.B + A.C olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $A.(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+2+6 & 0+2+9 & 4+6+15 \\ 3+2+8 & 0+2+12 & 12+6+20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 11 & 25 \\ 13 & 14 & 38 \end{bmatrix}$$

$$A.B + A.C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+2+6 & 2+0+3 \\ 3+0+0 & 0+2+8 & 6+0+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0+2+6 & 0+0+3 & 2+6+12 \\ 0+2+8 & 0+0+4 & 6+6+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 3 & 10 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 & 20 \\ 10 & 4 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 25 \\ 13 & 14 & 38 \end{bmatrix}$$

KARE MATRİSİNİN KUVVETLERİ

n. sıradan bir kare matris A ve $k \in N^+$ ise $A^o = I$, $A^1 = A$, $A^2 = A.A$, $A^3 = A.A^2$, ..., $A^k = A.A^{k-1}$

Birim matrisin tüm pozitif tam sayı kuvvetleri kendisine eşittir.

$I^2 = I$, $I^3 = I$, ... , $I^k = I$

şeklinde gösterilir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ise A^3 matrisi nedir?

Çözüm :

$A^2 = A.A$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+2.3 & 1.2+2.0 \\ 3.1+0.3 & 3.2+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$A^3 = A^2.A$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.1+2.3 & 7.2+2.0 \\ 3.1+6.3 & 3.2+6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ

A, n. sıradan bir kare matris olsun.

$A.B = B.A = I_n$

eşitliğini sağlayan n. sıradan bir B kare matrisi varsa B ye, A nın çarpma işlemine göre tersi denir ve

$B = A^{-1}$

şeklinde gösterilir.

Buradan,

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

şeklinde ifade edilir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersi nedir?

Çözüm : Yukarıdaki tanımdan yararlanırsak, yani

$A.A^{-1} = I$

olduğunu biliyoruz. O hâlde,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olarak keyfi seçelim

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{array}{l} 3a+2c = 1 \\ 3b+2d = 0 \\ 2a-c = 0 \\ 2b-d = 1 \end{array} \right\}$ olduğunu görürüz. Bu denklemi çözdüğümüzde a, b, c, d yi buluruz.

$$\begin{array}{l} 3a+2c = 1 \\ 2/\ 2a-c = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7a = 1 \\ a = \frac{1}{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3b+2d = 0 \\ 2/\ 2b-d = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7b = 2 \\ b = \frac{2}{7} \end{array}$$

$3.\frac{1}{7} + 2c = 1$

$2c = 1 - \frac{3}{7}$

$c = \frac{2}{7}$

$3.\frac{2}{7} + 2d = 0$

$2d = -\frac{6}{7}$

$d = -\frac{3}{7}$

O hâlde $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix}$

olarak bulunur.

Pratikde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *kare matrisinin, çarpma işlemine göre tersini bulurken, aşağıdaki işlem yapılır.*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ise } \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

$ad-bc \neq 0$ olmak zorundadır.

O hâlde bir önceki örneği pratik olarak çözelim..

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ *verilmişti. Burada $a=3, b=2, c=2, d=-1$*

$$A^{-1} = \frac{1}{3.(-1)-2.2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ matrisinin, çarpma işlemine göre tersi olması için x hangi değeri alamaz?

Çözüm : $2x - 15 = 0$

$2x = 15$

$x = \frac{15}{2}$ olamaz.

TEOREM : a) Bir kare matrisinin, çarpma işlemine göre tersi varsa, tersi tekdir.

b) Bir A kare matrisinin tersi varsa, A^{-1} matrisinin de tersi vardır. Yani,

$(A^{-1})^{-1} = A$

c) A ve B kare matrislerinin tersi varsa ve A.B ile $B^{-1} . A^{-1}$ tanımlı ise

$(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ iki karesel matris verilsin.

$(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$(A.B)^{-1} = \frac{1}{4-20} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4-0} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0-4} . \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} . A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$

O hâlde $(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

Olduğu gösterilmiş oldu.

MATRİSLERDE TRANSPOZ (DEVRİK) İŞLEMİ

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ matrisini, satırlarını sütun ve sütunları satır hâline getirirken elde edilen $[a_{ji}]_{nxm}$ matrisine, A matrisinin transpozu (devriği) denir ve A^T ile gösterilir.

MATRİSLERDE TRANSPOZ (DEVRİK) İŞLEMİNİN ÖZELİKLERİ

A ve B matrisleri için; A+B, A.B, A^{-1} matrisleri tanımlı ve $k \in R$ olmak üzere

a) $(A^T)^T = A$ (Bir matrisin transpozunun transpozu kendisine eşittir.)

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

c) $(A.B)^T = B^T.A^T$

d) $(k.A)^T = k.A^T$

e) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3x2}$ matrisi verilsin.

a) $A^T = ?$ b) $(A^T)^T = A$ olduğunu göster.

Çözüm : a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Transpozu alınan matrisin satırları sütun, sütunları satır oldu.

ÖRNEKLER

1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ ise $A+B = ?$

Çözüm : $A+B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 3+4 \\ 4-1 & -5+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin toplamaya göre ters matrisini bulunuz.

Çözüm : $A + A^{-1} = 0$ buradan,

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur.

$2+a = 0$ ise $a=-2$ $3+c = 0$ ise $c = -3$

$5+b = 0$ ise $b = -5$ $-1+d = 0$ ise $d=1$

O halde $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B= \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ise A.B nedir?

Çözüm : $A=\begin{bmatrix}3 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(-2)+5.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6+35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29\end{bmatrix}$

Dikkat edilirse A matrisi 1x2 tipinde B matrisi 2x1 tipinde, dolayısıyla A.B matrisi 1x1 tipindedir.

4) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-3 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3x3}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}_{3x2}$ ise A.B nedir?

Çözüm : A.B matrisi 3x2 tipinde olduğu bellidir.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-3 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.1+2.2+(-1).3 & 1.2+2.(-1)+(-1).4\\-3.1+2.2+1.3 & -3.2+2.(-1)+1.4\\2.1+0.2+3.3 & 2.2+0.(-1)+3.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\4 & -4\\11 & 16\end{bmatrix}$$

5) $A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$ ise

A - B.C matrisinin eşiti nedir?

Çözüm : İşlem sırasını göz önüne alalım. O hâlde önce çarpma işleminden başlayalım.

$$B.C=\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2 & 1+1\\-3+6 & 3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$$

$$A-B.C=\begin{bmatrix}-3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\-2 & -2\end{bmatrix}$$

6) $\begin{bmatrix}-3 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}$ matrisinin çarpma işlemine göre ters matrisi nedir?

Çözüm : $A.A^{-1}=I$ olduğunu biliyoruz. O hâlde,

$$\begin{bmatrix}-3 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3a+c & -3b+d\\2a+4c & 2b+4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$-3a+c=1$

$-3b+d=0$

$2a+4c=0$

$2b+d=1$

eşitliklerinden yok etme kuralı ile a, b, c, d yi bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 2 & -3a+c=1 \\ 3 & 2a+4c=0 \end{array} \qquad 14c = 2 \qquad -3a+\frac{1}{7}=1 \text{ den}$$

$$c=\frac{1}{7} \qquad \frac{1}{7}-1=3a$$

$$-\frac{6}{21}=a$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & -3b+d=0 \\ -1 & 2b+4d=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -12b+4d=0 \\ -2b-4d=-1 \end{array} \qquad b=\frac{1}{14}$$

b = 1/14 denklemde yerine yaz. d = 3/14 olur.

o halde $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/7 & 1/14 \\ 1/7 & 3/14 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

7) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ise A matrisinin transpozu (devriği) nedir?

Çözüm : $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

DETEMİNANTLAR

Elemanları reel sayılar olan nxn tipindeki kare matrislerin kümesinden, reel sayılar kümesine tanımlanan fonksiyona, determinant fonksiyonu denir.

A karesel matrisinin determinantı, det A veya |A| ile gösterilir.

1x1 tipindeki karesel matrisin determinantı yani,

det $[a_{11}]_{1x1} = a_{11}$ dir.

Örnek : a) det [2] = 2 b) det [5] = 5

2x2 tipindeki matrislerin determinantı alınırken,

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ olsun.

$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_{+} = ad - bc$ ile ifade edilir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ise detA nedir?

Çözüm : $\det A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{-}^{\;+} = 1.4 - 2.3 = 4-6 = -2$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} \text{Sinx} & -\text{Cosx} \\ \text{Cosx} & \text{Sinx} \end{bmatrix}$ ise det A nedir?

Çözüm : $\det A = \begin{bmatrix} \text{Sinx} & -\text{Cosx} \\ \text{Cosx} & \text{Sinx} \end{bmatrix}_{-}^{\;+} = \text{Sinx} \,.\, \text{Sinx} - \text{Cosx}.\,(-\text{Cosx})$

$= \text{Sin}^2 x + \cos^2 x$

$= 1$

Örnek : $\begin{vmatrix} 2000 & 2001 \\ 2002 & 2003 \end{vmatrix} = ?$

Çözüm : 2000.2003 - 2001.2002

basitlik olsun diye 2000 = x diyelim.

$x\,(x+3) - (x+1)\,(x+2)$

$x^2 + 3x - (x^2+3x+2) = \cancel{x^2} + \cancel{3x} - \cancel{x^2} - \cancel{3x} - 2$

$= -2$

A = $[a_{ij}]$ kare matrisinin, bir a_{ij} teriminin bulunduğu i. satır ve j. sütun atıldığında, geriye kalan matrisin determinantına a_{ij} terimin minörü denir. ve M_{ij} şeklinde gösterilir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin, a_{12} teriminin minörünü bulunuz.

Çözüm : M_{12} bulunurken, A matrisin 1. satırı ve 2. sütunu yok edilir, geriye kalan kısmın determinantı alınır. yani;

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-0 = -2$$

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ kare matrisinde, $(-1)^{i+j} . M_{ij}$ ifadesine, a_{ij} terimin kafaktörü denir ve A_{ij} ile gösterilir.

Örnek : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinde a_{23} teriminin kafaktörünü bulunuz.

Çözüm : $A_{23} = (-1)^{2+3} . M_{23}$

M_{23} bulunurken, 2. satır ve 3. kolon yok edilir. Geriye kalan kısmın determinantı alınır.

$$M_{23} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} . 1 = (-1)^5 . 1 = -1 . 1 = -1$$

3x3 tipindeki bir karesel matrisin determinantını hesaplarken, bir satırına ya da bir sütununa göre açılım yaparak hesaplayabiliriz. Her ikisi de aynı sonucu verir.

a) Bir satıra göre hesaplama :

3x3 tipindeki bir matris , $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ olsun.

1. satıra göre $\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} . A_{12} + a_{13} A_{13}$

2. satıra göre $\det A = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$

3. satıra göre $\det A = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$

Her üç hesaplama aynı sonucu verir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. det A nedir?

Çözüm : 1. satıra göre hesaplarsak,

det $A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ o hâlde,

det $A = 1.A_{11} + 1.\,A_{12} + 2.\,A_{13}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 . \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 -3 = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.\ (-2-2) = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

bulduğumuz kafaktörleri yerlerine koyarsak.

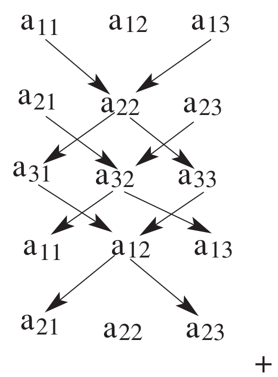
det A = 1.(-6) + 1.4 + 2.0 = -6+4 = -2

Siz de 2. satır ve 3. satıra göre açınız. Göreceksiniz ki aynı sonucu verir. Ancak, yukarıda uzun işlemler yerine 3x3 tipindeki matrislerin determinantlarını bulmak için daha basit olan sarus kuralı kullanılmaktadır.

SARRUS (SARUS KURALI)

3x3 tipinde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

det $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$



$= a_{11}.\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}.\, a_{32}\, .\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23}$ - $(a_{13}.\, a_{22}\, a_{31} + a_{23}\, a_{32}\, a_{11} + a_{33}\, a_{12}\, a_{21})$

a) ***Determinantın ilk iki satırı, determinantın altına eklenir.***

b) ***Sağ köşegenler üzerinde bulunan elemanlar çarpılır ve bu çarpımlar toplanır.***

c) ***Sol köşegenler üzerinde bulunan elemanlar çarpılır ve bu çarpımlar toplanır.***

(b) ve (c) sonuçları birbirinden çıkartılır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. det A nedir?

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1.3.(-1) + 2.3.2 + 2.1.1] - [2.3.2 + 1.3.1 + (-1).1.2]$$

$$= [-3 + 12 + 2] - [12 + 3 - 2]$$

$$= 11 - 13 = -2$$

3x3 tipindeki matrislerin determinantlarını sarus kuralı ile öğrenmenizde fayda olacaktır.

DETERMİNANTLARIN ÖZELİKLERİ

1. Bir determinantın, herhangi bir satırı ya da sütunundaki elemanların hepsi sıfır ise, bu determinantın değeri sıfırdır.

Örnek : a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

2. Bir determinantın, herhangi iki satırı ya da sütun elemanları karşılıklı olarak aynı ise, bu determinantın değeri sıfırdır.

Örnek : a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$

3. Bir determinantın, herhangi iki satırı ya da sütun elamanları karşılıklı orantılı ise, bu determinantın değeri sıfırdır.

Örnek :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$

b) $\frac{1}{2}$ katı

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0$

4. A, n.sıradan bir kare matris (nxn tipinde) ise det A = det A^T

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ olsun,

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+9) - (6+0-6) = 8$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1+0+9) - (6+0-6) = 8$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}$$

5. Bir determinantın, bir satır ya da bir sütunu, bir k∈R sayısı ile çarpılırsa bu determinantın değeri de k ile çarpılmış olur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi olsun.

3. (det A) -1 = ?

Çözüm : $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-3 = 5$

3. det A -1 = 3.5 -1 = 14

Örnek : $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ise

$$k.A = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix}$$

6. Bir determinantın, herhangi iki satırı ya da herhangi iki sütunun yerleri değişirse determinantın işareti değişir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ise det A = 4-6 = -2

$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise det B = 6-4 = 2

satırların yerleri değişti. İşaret de değişti.

7. Bir determinantın bir satırındaki ya da bir sütunundaki elemanlar, k∈R ile çarpılıp başka bir satıra ya da sütuna karşılıklı olarak eklenirse, determinantın değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3.1+1 \\ 2 & 1 & 3.2+4 \\ 3 & 0 & 3.3+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

1. sütun 3. ile çarpıp 3. sütunu ekledik. Her iki determinantın sonucunu sarus kuralı ile bulunuz. Göreceksiniz ki; sonuçlar aynıdır.

8. (x,y,z) koordinat sisteminde bir ABC üçgeninin koordinatları A(x,y,z), $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ olsun. ABC ücgeninin alanı

$$A = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|$$ ile bulunur.

LİNEER DÖNÜŞÜMLER

$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **Lineer dönüşüm matrisi $A(x_1, y_1)$ noktasını**

$K(x, y)$ noktasına dönüştürüyorsa,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEKLER

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ise

det (A+B) değeri nedir?

Çözüm : $A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 3-1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18-10 = 8$$

2) Sarus kuralı ile aşağıdaki matrisin determinantını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Çözüm :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2+6+40) - (15-4-8) = 48-3 = 45$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{matrix}$$

3) (x, y, z) koordinat sisteminde bir ABC üçgeninin köşelerinin koordinatları A(1, 2, 3) B(-1, -2, 1) C(1, 3, 4) olduğuna göre bu ABC üçgeninin alanı nedir?

Çözüm : Alanı = $\left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|$ dir. o halde,

$$A(ABC) = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| (-8-9+2) - (-6+3-8) \right|$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix}$$
$$= \frac{1}{2} \left| -15 + 11 \right| = \frac{1}{2} \left| -4 \right| = 2 \text{ br}^2$$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$ ise $x = ?$

Çözüm : Sarus kuralına göre,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1-3x \end{vmatrix} = 0 \text{ ise}$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$(1 -3x - 3+0) - (-2 + 0 + 6-18x) = 0$

$1-3x -3 + 2-6+18x = 0$

$15x -6 = 0$

$x= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2a^2$ ise $a = ?$

Çözüm : Sarus kuralına göre,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+4a) - (2a+2a^2+0)$$
$$\begin{matrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{aligned} &= 4a+1 -2a^2 - 2a \\ &= -2a^2 + 2a+1 \end{aligned}$$

$-\cancel{2a^2} + 2a+1 = a-\cancel{2a^2}$

$2a+1 = a$

$a = -1$

ÖZET

Bu bölümde, aşağıdaki durumlar öğrencilere verilmeye çalışılmıştır.

- Matrisin tanımı
- İki matrisin eşitliği
- Matrislerde dört işlem ve skalar ile çarpma işleminin özelikleri
- Birim matris ve kare matris tanıtılmıştır.
- Kare matrisin kuvvetleri örneklerle öğrencilere tanıtılmıştır.
- Bir matrisin çarpma işlemine göre tersi öğrencilere tanıtılmıştır.
- Matrislerde devrik işlemi öğrencilere tanıtılmıştır.
- Determinantın tanımı
- Minör ve kafaktör tanımları
- Sarrus kuralı ile determinant çözümü öğrencilere tanıtılmıştır.
- Determinantın özellikleri tanıtılıp, örneklerle öğrencilerin anlama durumları hızlandırılmıştır.

DEĞERLENDİRME TESTİ (3)

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ise A^{15} ise matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2)^{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $(-2)^{15} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $4^{15} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ D) $4^{15} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre xy çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{1}{24}$ B) $\frac{-1}{18}$ C) $\frac{-1}{16}$ D) $-\frac{1}{12}$

3) $\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix}$ matrisinin tersi kendisine eşit olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{17}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{35}}{6}$

4) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2 & 3 & 4 \\ x & 5 & x \end{vmatrix} = 16$ denkleminin kökü kaçtır?

A) 0 B) -1 C) -2 D) -3

5) $\begin{vmatrix} 99876 & 98877 \\ 99874 & 99875 \end{vmatrix}$ determinantın değeri nedir?

A) $(99870)^2$ B) 99872 C) 99882 D) 2

6) $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi A(1, 2) noktasını (-2,3) noktasına dönüştürüyorsa B(2,4) noktası hangi noktaya dönüşür?

A) (-4,6) B) $(-1, \frac{3}{2})$ C) (2,-3) D) (2,3)

7) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {-1, -2, -3} B) {0, -6, 6} C) {-6, 0} D) {0, -3, 2}

DEĞERLENDİRME TESTİNİN ÇÖZÜMLERİ (3)

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 . A = -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -2.4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= -8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -8, I = (-2)^3.I$

$A^{15} = (A^3)^5 = ((-2)^3)^5 . I^5$

$= (-2)^{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Doğru Cevap A

2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1.6 - 2.3} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$= -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$

$x = \frac{-1}{2}$ $y = \frac{1}{12}$ $x \cdot y = -\frac{1}{24}$ Doğru Cevap A

3) $A.A^{-1} = I$ o halde,

$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a^2 + \frac{1}{36} & \frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ \frac{a}{12} + \frac{b}{12} & \frac{1}{36} + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a^2 + \frac{1}{36} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{35}{36}$

$a = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$ Doğru Cevap D

4) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2 & 3 & 4 \\ x & 5 & x \end{vmatrix} = 16$ sarrus kuralı ile ise

$$\begin{matrix} x & 1 & x \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$3x^2 + 10x + 4x - (3x^2+20x + 2x) = 16$

$3x^2 + 14x - 3x^2 - 22x = 16$

$-8x = 16$

$x = -2$ Doğru Cevap C

5) 99874 = x olsun.

$\begin{bmatrix} x+2 & x+3 \\ x & x+1 \end{bmatrix} = (x+1)\ (x+2) - x\ (x+3)$

$= x^2 + 3x +2 - x^2 - 3x = 2$ Doğru Cevap D

6) $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Lineer dönüşüm matrisi A(x,y) noktasını K(x,y) noktasına dönüştürüyorsa

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dir.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} 2. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= 2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ Doğru Cevap A

7) Sarrus kuralı ile

$(x+1)\ (x+2)\ (x+3) + 6+6 - [3(x+2) + 6(x+1) +2(x+3)] = 0$

$x^3 + 6x^2+11x + 6+12 - [3x + 6+6x+6+2x+6] = 0$

$x^3 + 6x^2 + 11x + 18 -11x -18 = 0$

$x^3 + 6x^2 = 0$ ise $x^2\ (x+6) = 0$

$x_1 = 0\ x_2 = 0\ \ x_3 = -6$

Ç.K = {-6, 0} Doğru Cevap C