ÜNİTE II.

UZAYDA VEKTÖR, DOĞRU VE DÜZLEMİN ANALİTİK İNCELENMESİ

1. ANALİTİK UZAY
2. ANALİTİK UZAYDA DİK KOORDİNAT EKSENLERİ VE ANALİTİK UZAY
   - I. Analitik uzayda koordinat sistemi
   - II. Analitik uzayda dik koordinat eksenleri
   - III. Analitik uzayda bir noktanın apsisi, ordinatı ve kodu
   - IV. Analitik uzayda bir noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığı
   - V. Analitik uzayda iki nokta arasındaki uzaklık
   - VI. Analitik uzayda bir doğru parçasının orta noktası
3. KÜRE DENKLEMİ
4. UZAYDA VEKTÖRLER
   - I. Giriş
   - II. Uzayda nokta ile vektörün eşlemesi ve yer vektörü
   - III. Bir vektörün uzunluğu
   - IV. Uzayda iki vektörün eşitliği
   - V. Uzaydaki vektörler kümesinde toplama işlemi ve toplama işleminin özelikleri
   - VI. Uzaydaki vekörler kümesinde çıkarma işlemi
   - VII.Bir vektörün bir reel sayı ile çarpımı
   - VIII. Bir vektörün standart taban vektörüne göre ifadesi
   - IX. Uzayda iki vektörün paralelliği
   - X. İç çarpım fonksiyonu ve Öklid iç çarpım işlemi
   - XI. Bir vektörün normu (uzunluğu)
   - XII. Uzayda iki vektör arasındaki açı
5. UZAYDA DOĞRULAR
   - I. Düzlemde doğrular
   - II. Uzayda doğrular
   - III. Bir noktadan geçen ve bir vektöre paralel olan doğrunun denklemi
   - IV. Uzayda iki noktası verilen doğrunun denklemi
   - V. Uzayda verilen iki doğrunun birbirine paralel olma durumu
   - VI. Uzayda verilen iki doğrunun birbirine dik olma durumu
   - VII. Uzayda iki doğru arasındaki açının cosinüsü
   - VIII. Uzayda verilen bir noktanın bir doğruya uzaklığı

6. UZAYDA DÜZLEMLER
    - I. Uzayda düzlemler
    - II. Uzayda verilen bir noktadan geçen ve verilen bir vektöre dik olan düzlemin denklemi
    - III. Uzayda bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı
    - IV. Uzayda doğru ile düzlemin paralel olma şartı
    - V. Uzayda doğru ile düzlemin dik olma şartı
    - VI. Uzayda bir doğru ile düzlemin ortak (kesim) noktasının koordinatlarını bulmak
    - VII. Uzayda bir noktanın bir düzleme uzaklığı
    - VIII. Uzayda iki düzlem arasındaki açı
    - IX. Uzayda iki düzlemin paralel olma şartı
    - X. Uzayda iki düzlemin dik olma şartı
    - XI. Uzayda düzlem demeti
7. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ
    - I. Tanım
    - II. Lineer denklem sistemleri
    - III. Çözüm kümesi
    - IV. Lineer denklem sisteminin çözüm yolları
        - a. Yok etme yöntemi
        - b. Yerine koyma yöntemi
        - c. Cramer (Kramer) yöntemi
    - V. Lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulma. Geometrik anlamını açıklama
        - a. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemler
        - b. İki bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemler
        - c. Üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemler
        - d. Üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemler
8. ÖZET
9. ALIŞTIRMALAR
10. TEST II

BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI

* Bu bölümde, uzayda dik koordinat eksenlerini kavrayabilecek, uzayda vektör, doğru ve düzlemin analitik incelenmesini öğrenecek,

1. Uzayda dik koordinat eksenleri ile ilgili uygulama yapabilmek için;

* Analitik uzayı ve uzayda dik koordinat eksenlerini tanıyacak,
* Uzayda bir noktanın apsisini, ordinatını ve kodunu tanıyacak,
* Uzayda koordinatları verilen iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplayabilecek,

2. Uzayda vektörlerle ilgili uygulamalar yapabilmek için;

* Yer vektörünü tanımlayabilecek, yer vektörü ile uzayın noktaları arasındaki ilişkiyi yazabilecek,
* Yer vektörünün bileşenlerini tanımlayabilecek ve sembolle gösterebilecek,
* Başlangıç ve bitim noktaları bilinen bir vektöre eş olan, yer vektörünün bileşenlerini hesaplayabilecek,
* Bileşenleri ile verilen bir vektörün uzunluğunu hesaplayabilecek,
* Bileşenleri verilen vektörlerin toplama işlemini ve toplama işleminin özeliklerini vektörlerin bileşenleri cinsinden gösterebilecek,
* Bileşenleri verilen vektörlerin çıkarma işlemini yapabilecek,
* Verilen bir vektörün, verilen bir reel sayı ile çarpımını bileşenleri cinsinden bulabilecek,
* Verilen iki vektörün, paralel olup olmadığını bulabilecek,
* Verilen iki vektörün, Öklid iç çarpımını hesaplayabilecek,
* Verilen bir vektörün boyunu hesaplayabilecek,
* Verilen iki vektör arasındaki açıyı hesaplayabilecek,
* Verilen iki vektörün dik olup olmadığını gösterebilecek,

3. Uzayda doğrular ile ilgili uygulamalar yapabilmek için;

* Bir noktadan geçen ve bir vektöre paralel olan doğrunun denklemini yazabilecek,
* İki noktası verilen doğrunun denklemini yazabilecek,
* Verilen iki doğrunun birbirine paralel olma ve dik olma durumunu bulabilecek,
* Verilen iki doğru arasındaki açıyı hesaplayabilecek,
* Verilen bir noktanın bir doğruya uzaklığını hesaplayabilecek,

4. Uzayda düzlemler ile ilgili uygulamalar yapabilmek için;

* Uzayda düzlem denklemlerini, verilen bir noktadan geçen ve verilen bir vektöre dik olan düzlem denklemini yazabilecek,
* Bir doğru ile bir düzlem arasındaki açıyı hesaplayabilecek,
* Doğru ile düzlemin parelel ve dik olma durumunu bulabilecek,
* Bir doğru ile bir düzlemin ortak (kesim) noktasının koordinatlarını bulabilecek,
* Bir noktanın bir düzleme uzaklığını hesaplayabilecek,
* İki düzlem arasındaki açıyı hesaplayabilecek,
* İki düzlemin paralel ve dik olma durumlarını bulabilecek,
* Düzlem demetini yazabilecek,

5. Lineer denklem sistemleri ile ilgili uygulamalar yapmak için ;

* Lineer denklem sistemlerini tanıyabilecek ve çözüm kümesini hesaplayabilecek,
* İki bilinmiyenli iki veya üç denklemden oluşan denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulabilecek. Geometrik anlamını açıklayabilecek,
* Üç bilinmiyenli iki veya üç denklemden oluşan denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulabilecek. Geometrik anlamını açıklayabileceksiniz.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Bu bölümde göreceğimiz, uzaydaki dik koordinat sistemlerini, uzaydaki vektörleri, doğru ve düzlemlerin analitik incelenmesini, daha iyi anlayabilmeniz için geçmiş konulardaki tanımları, temel kavramları inceleyiniz ve problemleri tekrar çözünüz.
* Konu ile ilgili çok sayıda, örnek ve alıştırma çözünüz. Anlayamadığınız konuları mutlaka tekrar ediniz.
* Problemleri çözerken, verilenlerle istenilenler arasında mutlaka bir ilişki kurunuz. Gerekirse, şekil çizerek çözmeye çalışınız.
* Çeşitli kaynak kitaplardan faydalanarak, konu ile ilgili problemler çözünüz.
* Bölümün sonunda verilen alıştırmaları ve değerlendirme testini mutlaka çözünüz. Değerlendirme testinin cevaplarını, cevap anahtarı ile karşılaştırınız.

ÜNİTE II

UZAYDA VEKTÖR, DOĞRU VE DÜZLEMİN ANALİTİK İNCELEMESİ

1. ANALİTİK UZAY

Birinci bölümde, reel sayılarla bir doğrunun noktaları arasında birebir eşleme yaptık. Eşleme yapılmış ve yönlendirilmiş doğruya sayı doğrusu dedik.

Bir düzlemdeki noktalar ile reel sayı ikileri ile eşlenmiş olan düzleme, analitik düzlem denir. Analitik düzlemin dışında da noktalar vardır. Analitik düzlemin noktaları ile bu düzlemin dışındaki bütün noktalar, uzayı meydana getirirler.

Bu bölümde, uzayın noktaları ile reel sayı üçlülerini birebir eşleyerek ve cebirsel yöntemlerini de kullanarak yeni bilgiler öğreneceğiz.

2. ANALİTİK UZAYDA DİK KOORDİNAT EKSENLERİ VE ANALİTİK UZAY

I. Analitik uzayda koordinat sistemi

Uzaydaki bir O noktasından birbirine dik olan üç sayı ekseninin oluşturduğu sisteme, Uzayda koordinat sistemi denir.

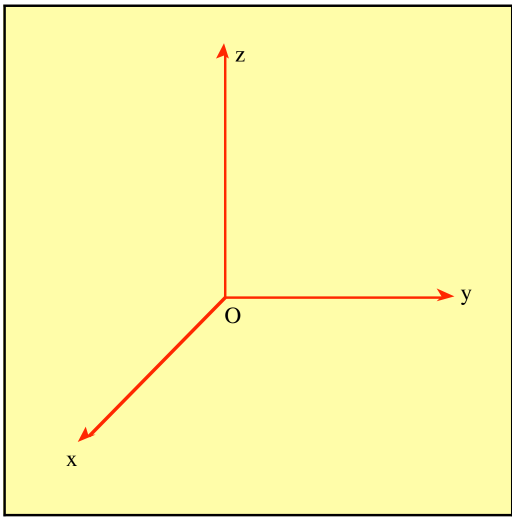
II. Analitik uzayda dik koordinat eksenleri

O noktasına, başlangıç noktası (orijin) sayı eksenlerine de dik koordinat eksenleri denir. 0x, 0y ve 0z eksenleri ile gösterilir. 0x eksenine birinci eksen veya x ekseni, 0y eksenine ikinci eksen ya da y ekseni, 0z eksenine de üçüncü eksen ya da z ekseni denir. Bu eksenlere koordinat eksenleri ve bunların ikişer ikişer oluşturdukları birbirine dik üç düzleme de, koordinat düzlemleri denir. (Şekil 2.1)

x ve y eksenlerinin oluşturduğu düzleme x0y veya xy düzlemi denir. y ve z eksenlerinin oluşturduğu düzleme y0z veya yz düzlemi denir. x ve z eksenlerinin oluşturduğu düzleme x0z veya xz düzlemi denir.

Koordinat sisteminin oluşturduğu uzaya, analitik uzay denir.

Uzayda bir O noktası verilsin. Verilen bu noktadan birbirini dik kesen 0x, 0y ve 0z eksenlerini çizelim. Verilen reel sayılar, çizilen doğruların noktaları ile birebir eşlenerek, uzayda bulunan bütün noktalar, birer sayı üçlüleri olarak gösterilebilir.



Şekil 2.1

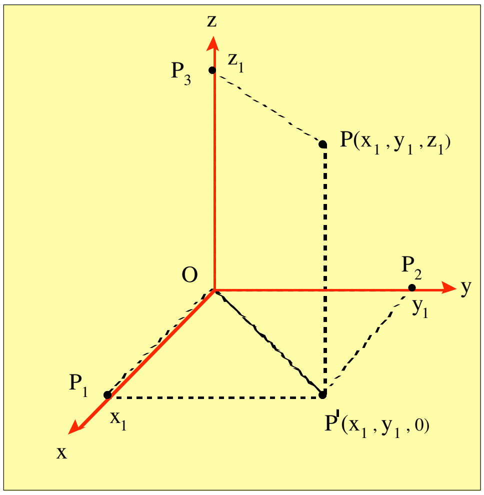
Analitik uzayda her nokta, bir sıralı reel sayı üçlüsüne ve her sıralı reel sayı üçlüsü de, uzayın bir noktasına karşılık gelir. $R^3 = \{ (x, y, z) \; x, y, z \in R \}$ **kümesi şeklinde gösterilir.**

III. Analitik uzayda bir noktanın apsisi, ordinatı ve kodu

Analitik uzayda, herhangi bir nokta $P(x_1, y_1, z_1)$ olsun.

P noktasının x0y düzlemi üzerindeki dik izdüşümü P´dür. (Şekil 2.2) de;

P′ noktasının, 0x ekseni üzerindeki dik izdüşümü P_1 olsun. P_1 noktasına karşılık gelen x_1 reel sayısına, P noktasının **apsisi** denir.



Şekil 2.2

P′ noktasının, 0y ekseni üzerindeki dik izdüşümü P_2 olsun. P_2 noktasına karşılık gelen y_1 reel sayısına, P noktasının **ordinatı** denir.

P noktasının 0z ekseni üzerindeki dik izdüşümü P_3 olsun. P_3 noktasına karşılık gelen z_1 reel sayısına da A noktasının **kodu** denir.

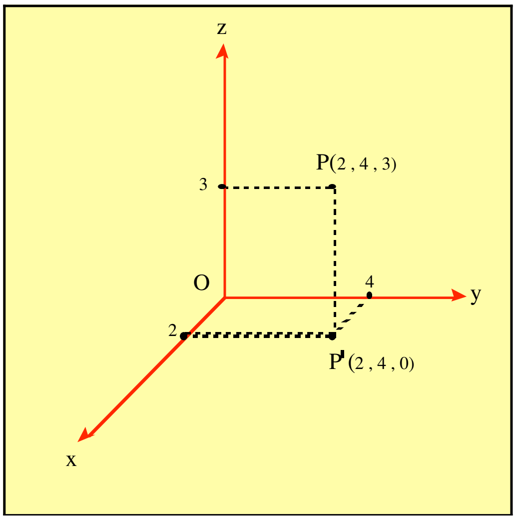
(Şekil 2.2) de; x_1 , y_1 ve z_1 reel sayılarına P noktasının koordinatları denir. $P(x_1, y_1, z_1)$ şeklinde gösterilir. P noktasının apsisi x_1, ordinatı y_1 ve kodu z_1 dir.

ÖRNEK 1

P(2,4,3) noktasını, uzaydaki koordinat sisteminde işaretleyelim.

ÇÖZÜM 1:

Uzayda verilen P (2, 4, 3) noktasının apsisi 2, ordinatı 4, kodu 3 tür. (Şekil 2.3) de yeri gösterilmiştir.



Şekil 2.3

IV. Analitik uzayda bir noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığı:

Analitik uzayda bir nokta $P(x_1, y_1, z_1)$ olsun. Bu noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığı $|OP|$ dir.

(Şekil 2.4) teki

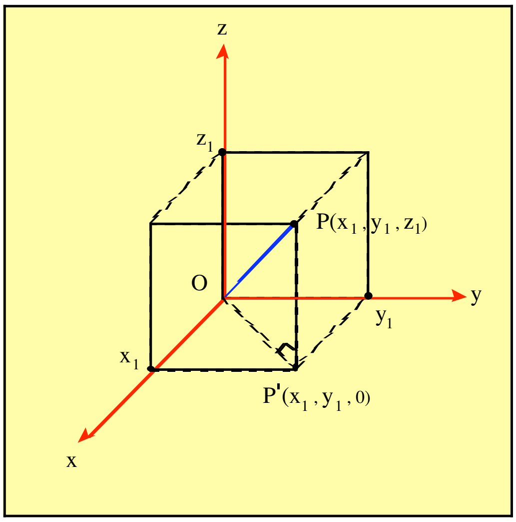
$OP'P$ dik üçgeninde;

$|OP|^2 = |OP'|^2 + |P'P|^2$ dir.

$|OP'|^2 = x_1^2 + y_1^2$ ve $|P'P|^2 = z_1^2$

olduğundan, $|OP|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ olur.

Buradan, $|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ birim olarak bulunur.



Şekil 2.4

Analitik uzayda, $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının, eksenlerin başlangıç noktasına olan uzaklığı; $|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ birimdir.

P noktası ile P noktasının koordinat düzlemlerindeki dik izdüşümleri bir dikdörtgenler prizmasının köşeleridir. (Şekil 2.4) de OP doğru parçası bu dikdörtgenler prizmasının cisim köşendir. Dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeninin uzunluğu,

$|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ birimdir.

ÖRNEK 2

Uzayda verilen $P(2, -3, 6)$ noktasının orijine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 2

Uzayda verilen $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının orijine olan uzaklığı

$|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ifadesinden,

$|OP| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$ birim olur.

V. Analitik uzayda iki nokta arasındaki uzaklık

Analitik uzayda, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin. Bu iki nokta arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulalım.

AB doğru parçasının x0y düzlemindeki dik izdüşümü OF doğru parçası olsun.

(Şekil 6.5) te, $|FE| = x_1 - x_2$

$|ED| = y_1 - y_2$ ve $|AC| = z_1 - z_2$ dir.

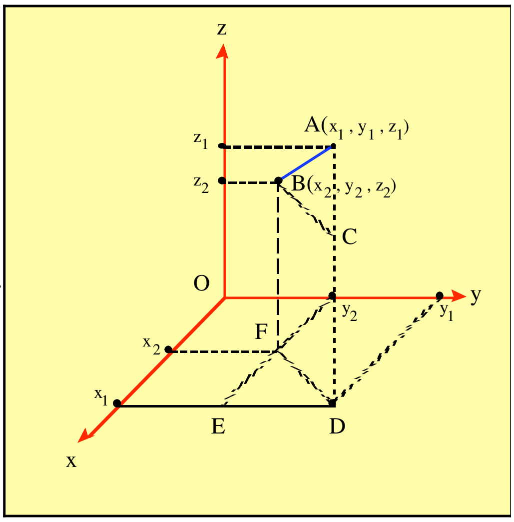
FED dik üçgeninde; $|FD|^2 = |FE|^2 + |ED|^2$ dir

ABC dik üçgeninde; $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$

ve $|BC|^2 = |FD|^2$ olduğundan,

$|AB|^2 = |FE|^2 + |ED|^2 + |AC|^2$ dir.

$|AB|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ olur.



Şekil 2.5

Buradan, $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ birim olarak bulunur.

Analitik uzayda verilen $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık, $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ birimdir.

ÖRNEK 3

Analitik düzlemde, A(1, 3, 4) ve B(2, 1 -1) noktaları veriliyor. Bu iki nokta arasındaki uzaklığının, kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 3

Uzayda verilen iki nokta A(1, 3, 4) ve B(2, 1, 1) olduğundan, bu iki nokta arasındaki uzaklık,

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ ifadesinden,

$|AB| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (4 - 1)^2}$

$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (3)^2}$;

$|AB| = \sqrt{1 + 4 + 9} + \sqrt{14}$ birim olur.

VI. Analitik uzayda bir doğru parçasının orta noktası

Analitik uzayda, AB doğru parçasının uç noktalarının koordinatları, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin. Bu doğru parçasının orta noktası $C(x_0, y_0, z_0)$ olsun.C noktasının koordinatları,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{ve} \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \text{olduğundan,}$$

$$C\left(x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \quad \text{olur.}$$

3. KÜRE DENKLEMİ

Uzayda, sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine (geometrik yerine) küre yüzeyi, küre yüzeyi ile sınırlanan cisme de küre denir.

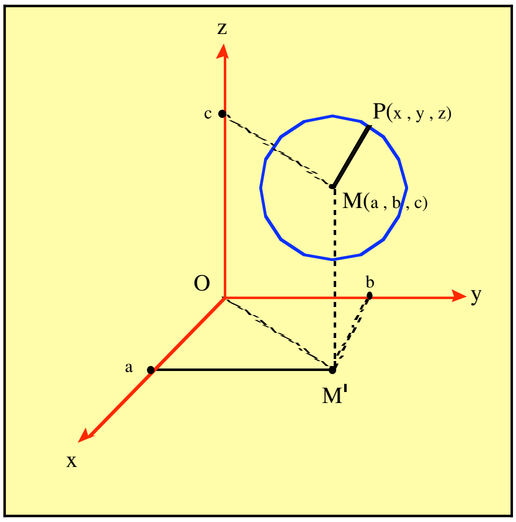
Sabit M(a, b, c) noktasına kürenin merkezi, P(x, y, z) noktasının merkezine olan uzaklığı r birim ise, (Şekil 2. 6) buna da, kürenin yarıçap uzunluğu denir.

Buna göre, uzayda iki nokta arasındaki uzaklık ifadesinden,

$$|MP| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} \quad \text{olur.}$$

Her iki tarafın karesi alınarak ve $|MP| = r$ olduğundan, $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ bulunur.

Bu denkleme, **kürenin denklemi** denir.



Şekil 2.6

Bu denklemde parantezler açılır, gerekli düzenleme yapılırsa,

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$ bulunur.

$-2a = D$, $-2b = E$, $-2c = F$ ve $a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = G$ ile gösterilirse,

$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ denklemi elde edilir. Bu denkleme de **kürenin genel denklemi** denir.

Kürenin genel denklemi verildiğinde, kürenin merkezi olan M(a, b, c) noktasının koordinatlarını ve r yarıçap uzunluğunu bulabiliriz.

Bunun için,

$-2a = D$ ise $a = -\frac{D}{2}$; $-2b = E$ ise $b = -\frac{E}{2}$; $-2c = F$ ise $c = -\frac{F}{2}$ dir.

Kürenin merkezinin koordinatları

$M(a, b, c)$ olduğundan, $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$ olur.

$a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = G$ olduğundan, $r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - G$ dir.

Buradan, $r^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} + \frac{F^2}{4} - G$ ise $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$ birim olur.

I. $D^2 + E^2 + F^2 - 4G > 0$ ise küre vardır.

II. $D^2 + E^2 + F^2 - 4G = 0$ ise küre bir noktadan ibarettir.

III. $D^2 + E^2 + F^2 - 4G < 0$ ise küre tanımlı değildir.

Merkezinin koordinatları $O(0, 0, 0)$ ve yarıçap uzunluğu r olan kürenin denklemi $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dir. Bu şekilde olan kürelere, merkezil küre denir.

ÖRNEK 4: Merkezinin koordinatları $M(3, 2, 1)$ ve yarıçap uzunluğu $r = 4$ birim olan kürenin genel denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 4: Kürenin denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ olduğundan, merkezinin koordinatları $M(3, 2, 1)$ ve yarıçap uzunluğu $r = 4$ birim olan kürenin denklemi $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 16$ olur.

ÖRNEK 5: Uzayda denklemi $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ olan kürenin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM 5: Verilen küre denkleminde, $D = -2$, $E = -4$ ve $F = -6$ dır.

$a = -\frac{D}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$; $b = -\frac{E}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$; $c = -\frac{F}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$ olduğundan

verilen kürenin merkezinin koordinatları; $M(1, 2, 3)$ tür.

$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$ ifadesinden, $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-6)^2 - 4(-11)}$;

$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 36 + 44} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2}10 = 5$ birimdir.

O halde, yarıçap uzunluğu 5 birim olur.

Analitik Uzayda, verilen kürenin merkezinin yerine göre, denklemini yazalım.

a. Merkezi orijinde olan kürenin denklemi: Merkezinin koorinatları M(0, 0, 0) ve yarıçap uzunluğu r birim olduğundan, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dir.

b. Merkezi x ekseni üzerinde olan kürenin denklemi: Merkezin koordinatları M(a, 0, 0) ve yarıçap uzunluğu r birim olduğundan, $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dir.

c. Merkezi y ekseni üzerinde olan kürenin denklemi: Merkezinin koordinatları M(0, b, 0) ve yarıçap uzunluğu r birim olduğundan, $x^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$ dir.

d. Merkezi z ekseni üzerinde olan kürenin denklemi: Merkezinin koordinatları M(0, 0, c) ve yarıçap uzunluğu r birim olduğundan, $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2$ dir.

e. Koordinat düzlemlerine teğet olan kürenin denklemi: Merkezinin koordinatları M(r, r, r) ve yarıçap uzunluğu r birim olduğundan, $(x - r)^2 + (y - r)^2 + z - r)^2 = r^2$ dir.

ÖRNEK 6

Denklemi $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 24 = 0$ olan kürenin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulalım. Bu kürenin merkezinin hangi eksen üzerinde olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM 6

Verilen küre denkleminde, D = 0, E = - 2 ve F = 0 dır.

$$a = -\frac{D}{2} = -\frac{0}{2} = 0 \quad ; \quad b = -\frac{E}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \quad ; \quad c = -\frac{F}{2} = -\frac{0}{2} = 0$$ olduğundan,

kürenin merkezinin koordinatları, $M(0, 1, 0)$ dır.

Bu da bize kürenin merkezinin y ekseni üzerinde olduğunu gösterir.

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$$ ifadesinden $$r = \frac{1}{2}\sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (0)^2 - 4(-24)}\ ;$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 96} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2}10 = 5$$ birimdir.

O halde, kürenin yarıçapının uzunluğu r= 5 birim olur.

4. UZAYDA VEKTÖRLER

I. GİRİŞ

Düzlemdeki vektörler için geçerli olan tanımlar, teoremler, kavramlar ve işlemler uzaydaki vektörler içinde geçerlidir.

Uzayda da noktalar ile vektörler arasında bir eşleme yapmak mümkündür.

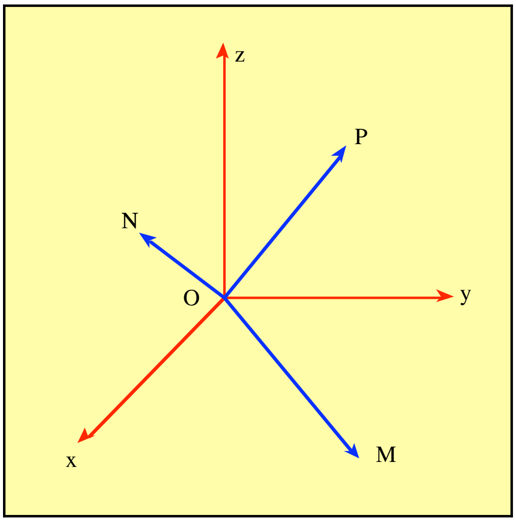
II. Uzayda, nokta ile vektörün eşlemesi ve yer vektörü

Uzayın her iki noktası bir vektör belirtir. Bu iki noktaya, vektörü temsil eden yönlü doğru parçasının başlangıç ve bitim noktaları denir.

Başlangıç noktası O ve analitik uzayın noktalarından biri P ise $\overrightarrow{OP}$ vektörüne, P noktasının yer (konum) vektörü denir.

Buna göre, başlangıç noktasını uzayın diğer noktalarına birleştiren her yönlü doğru parçası, bir yer vektörüdür.

(Şekil 2.7) de $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OM}$ ve $\overrightarrow{ON}$ vektörleri birer yer (konum) vektörüdür.



Şekil 2.7

Uzayın her noktasına, bir yer vektörü karşılık gelir.

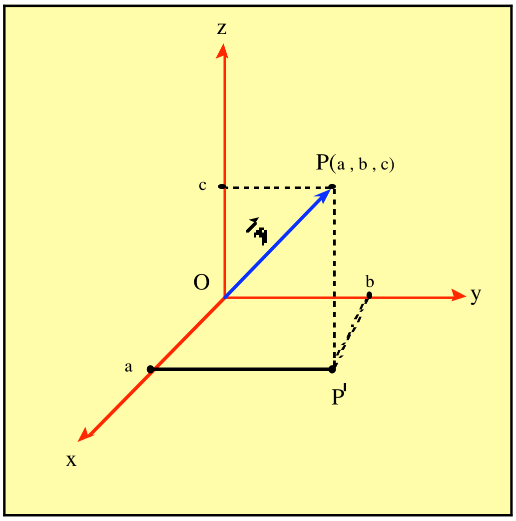
Analitik uzayın bir P(a, b, c) noktasını alalım. Başlangıç noktası O, bitim noktası P olan bir $\overrightarrow{OP}$ yer (konum) vektörünü yazabiliriz.

Şekil 2.8'deki $\vec{P} = \overrightarrow{OP}$ yer vektöründe;

P noktasının apsisi a, $\vec{P}$ vektörünün x birleşenidir. (1. birleşeni)

P noktasının ordinatı b, $\vec{P}$ vektörünün y birleşenidir. (2. birleşeni)

P noktasının kodu c, $\vec{P}$ vektörünün z birleşenidir (3. birleşenidir.)



Şekil 2.8

Analitik uzayın bir P(a, b, c) noktasının yer vektörü olarak, $\vec{P} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ şeklinde yazılır.

Uzayda; nokta vektör eşlemesinde, P noktasının koordinatları $\overrightarrow{OP}$ vektörünün bileşenleridir.

Uzayda herhangi A, B ve C noktaları için, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ bağıntısı vardır. (Paralelkenar kuralı)

Düzlemde olduğu gibi uzayda da, $A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ gibi iki nokta verildiğinde, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün bileşenlerini bulalım.

A ve B noktalarının belirttiği yer vektörleri

$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ tür.

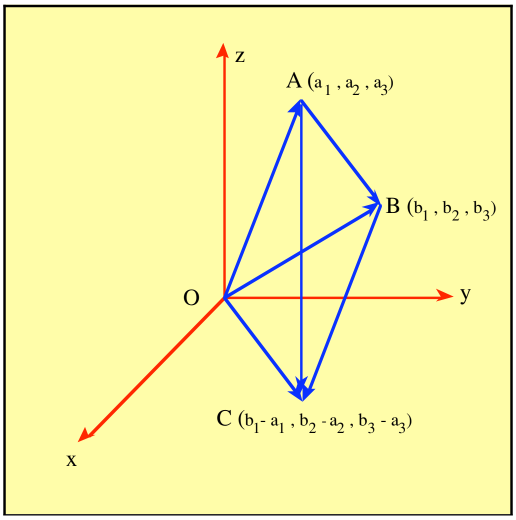
(Şekil 6. 9) da $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

vektörünün toplamı, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ yazılır.

Buna göre;

$\overrightarrow{AB} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3)$ olduğundan,

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ bulunur.



Şekil 2.9

$A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ noktaları verildiğinde $\overrightarrow{AB}$ vektörü, B bitim noktasının birleşenlerinden A başlangıç noktasının bileşenleri çıkarılarak bulunur. Bu da $\overrightarrow{OC}$ yer vektörüdür. Bu vektörlerin doğrultuları, yönleri ve uzunlukları aynı olduğundan, $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{OC}$ vektörü olur (Şekil 2.9).

ÖRNEK 7

Analitik uzayda, A(3, - 4, 2) ve B(2, 1, 0) noktaları veriliyor. Bu noktaların belirttiği $\overrightarrow{AB}$ vektörünün bileşenlerini bulalım.

ÇÖZÜM 7

Başlangıç noktası O olduğundan,

$\overrightarrow{OA} = (3, -4, 2)$ ve $\overrightarrow{OB} = (2, 1, 0)$ dır.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, 0) - (3, -4, 2)$

$\overrightarrow{AB} = (2 - 3, 1 + 4, 0 - 2)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 5, -2)$ olur.

ÖRNEK 8

Analitik uzayda, başlangıç noktası A(-3,-4,1) ve bitim noktası B(1, 2, 3) olan $\overrightarrow{AB}$ vektörü veriliyor. $\overrightarrow{AB}$ vektörüne eş olan yer vektörünün bileşenlerini bulalım.

ÇÖZÜM 8: $\overrightarrow{AB}$ vektörünün yer vektörü $\overrightarrow{OP}$ ise $\overrightarrow{OP} \equiv \overrightarrow{AB}$ dir.

O (0, 0, 0), A(-3 -4, 1) ve B(1, 2, 3) olduğundan, $\overrightarrow{OA} = (-3, -4, 2)$ ve $\overrightarrow{OB} = (1, 2, 3)$ tür.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, 2, 3) - (-3, -4, 1)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (1 + 3, 2 + 4, 3 - 1) = (4, 6, 2)$ dir.

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{OP}$ olduğundan, $\overrightarrow{OP} = (4, 6, 2)$ olur.

III. Uzayda bir vektörün uzunluğu

Uzayda herhangi iki nokta $A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ve $\overrightarrow{AB}$ vektörlerinin uzunluklarını bulalım. (Şekil 2.10)

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \text{ birimdir.}$$

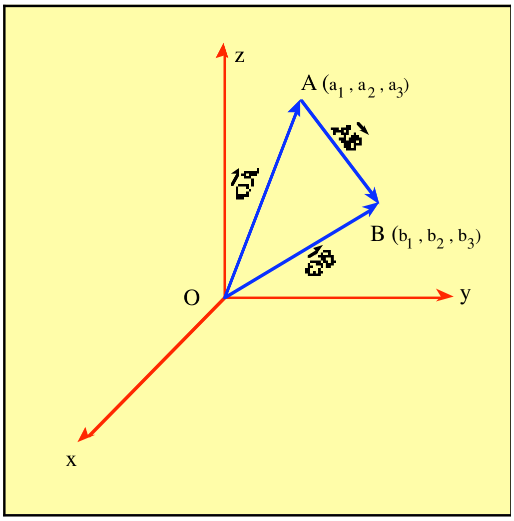
$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \text{ birimdir.}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

birimdir.

Uzunluğu 1 birim olan vektöre birim vektör denir.

Uzunlukları aynı olan yer vektörlerinin bitim noktaları, merkezil bir küre üzerindedir.



Şekil 2.10

ÖRNEK 9: Uzayda, A(4, -6, 2) ve B(2, -3 -1) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ve $\overrightarrow{AB}$ vektörlerinin uzunluklarının kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 9: $\overrightarrow{OA} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ifadesinden, $\overrightarrow{OA} = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2 + (2)^2}$

$\overrightarrow{OA} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ birimdir.

$\overrightarrow{OB} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ ifadesinden, $\overrightarrow{OB} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ birimdir.

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \ (b_3 - a_3)^2}$ ifadesinden, $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (-3+6)^2 + (-1-2)^2}$

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$ birimdir.

IV. Uzayda iki vektörün eşitliği

Uzayda, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A} = \vec{B}$ olabilmesi için, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ve $a_3 = b_3$ olmalıdır.

ÖRNEK 10

Uzayda $\overrightarrow{OA} = (2,a,b)$ ve $\overrightarrow{OB} = (c, 3, 1)$ vektörleri veriliyor.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ vektörü ise $a + b + c$ değerinin kaç olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 10

Uzayda $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ ise $(2, a, b) = (c, 3, 1)$ olduğundan, a=3, b=1 ve c=2'dir.

O halde, $a + b + c = 3 + 1 + 2 = 6$ olur.

V. Uzaydaki vektörler kümesinde toplama işlemi ve toplama işleminin özelikleri

Uzaydaki vektörler kümesinde;

$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri veriliyor.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_3, a_3 + b_3)$ vektörüne, $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin toplamı denir.

Toplama işleminin özelikleri

R^3 uzayındaki vektörlerin kümesi V ile gösteriliyor. V kümesi üzerinde tanımlı, toplama işleminin aşağıdaki özellikleri vardır.

a. V kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.

Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için, $(\vec{a} + \vec{b}) \in V$ vektörüdür.

b. V kümesinde, toplama işleminin değişme özeliği vardır.

Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ vektörüdür.

c. V kümesinde, toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

Her $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ için $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ vektörüdür.

d. V kümesinde toplama işleminin birim (etkisiz) elemanı vardır.

Bu eleman $\vec{O} = (0, 0, 0)$ olarak tanımlanan sıfır vektörüdür.

Her $\vec{a} \in V$ için $\vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}$ vektörüdür.

e. V kümesinde, her elemanın toplama işlemine göre tersi vardır.

Her $\vec{a} \in V$ için $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$ vektörüdür.

Uzayda vektörler kümesi, yukarıdaki özelikleri sağladığı için, toplama işlemine göre **bir değişmeli** gruptur.

ÖRNEK 11: Uzayda verilen $\vec{a} = (2, 1, -3)$ ve $\vec{b} = (0, 3, -1)$ vektörleri için $\vec{a} + \vec{b}$ toplamını bulalım

ÇÖZÜM 11: Uzayda verilen vektörlerin toplama işleminin tanımına göre,

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 1, -3) + (0, 3, -1) = (2 + 0 , 1 + 3, -3 -1) = (2, 4, -4)$ olur.

ÖRNEK 12: $\vec{a} = (1, -2, 6)$ vektörünün toplama işlemine göre tersini bulalım.

ÇÖZÜM 12

Uzayda verilen $\vec{a} = (1, -2, 6)$ vektörünün toplama işlemine göre tersi $-\vec{a} = (-1, 2, -6)$ vektörüdür.

ÖRNEK 13:

Uzayda verilen $\vec{a} = (2 + x , y - 5, z - y)$ vektörünün toplama işlemine göre tersi, $-\vec{a} = (3, -4 , 2)$ vektörü ise $x + y + z$ değerlerinin toplamını bulalım.

ÇÖZÜM 13:

$\vec{a}$ vektörünün tersi $-\vec{a}$ olduğundan, $-\vec{a} = (-2 - x, - y + 5, -z + y) = (3 - 4, 2)$
$-2 - x = 3$ ise $x = -5$ tir; $-y + 5 = - 4$ ise $y=9$ dur. $-z+y= 2$ ise $-z +9 = 2$; $z=7$ dir.
$x + y + z = - 5 + 9 + 7 = 11$ olur.

VI. Uzaydaki vektörler kümesinde çıkarma işlemi

Uzaydaki vektörler kümesinde,

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri veriliyor. Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ şeklinde yazabiliriz.

Bu işleme vektörler kümesinde **çıkarma işlemi** denir. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri için, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 , a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ olur.

ÖRNEK 14: Uzayda $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ve $\vec{b} = (5, 3, - 4)$ vektörleri veriliyor. $\vec{a} - \vec{b} =$ vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM 14: Uzayda verilen vektörler $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ve $\vec{b} = (5, 3, - 4)$ olduğundan, $\vec{a} - \vec{b} = (2 -5, -1-3, 3 +4) = (-3, -4, 7)$ olur.

VII. Bir vektörün bir reel sayı ile çarpımı

Vektörler kümesi V olsun. Her $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in V$ ve her $k \in R$ için $k.\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ vektörüne $\vec{a}$ vektörünün k sayısı ile çarpımı denir. Bu işleme de bir vektör ile bir **skaları çarpma işlemi** denir.

$k < 0$ ise $k\vec{a}$ çarpımı $\vec{a}$ vektörünün yönünü değiştirir, doğrultusunu değiştirmez

Bir vektör ile bir reel sayının çarpma işleminin, aşağıdaki özelikleri vardır.

a. Her, $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve her $k \in R$ için $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ vektörüdür.

b. Her, $\vec{a} \in V$ ve her $k_1, k_2 \in R$ için $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$ vektörüdür.

c. Her, $\vec{a} \in V$ ve her $k_1, k_2 \in R$ için $(k_1 . k_2)\vec{a} = k_1(k_2\vec{a})$ vektörüdür.

d. Her $\vec{a} \in V$ için $1.\vec{a} = \vec{a}$ vektörüdür.

ÖRNEK 15: Uzayda, $\vec{a} = (3, 1, -2)$ vektörü ile $k = 2$ sayısı veriliyor. $k.\vec{a}$ vekörünün bileşenlerini bulalım.

ÇÖZÜM 15: Bir vektör ile bir sayının çarpımı tanımından,

$$k.\vec{a} = 2\,(3, 1, -2) = (6, 2, -4)$$ vektörü olur.

ÖRNEK 16: Uzayda, $\vec{a} = (-1, -2, 3)$ ve $\vec{b} = (3, -4, 2)$ vektörleri veriliyor. $2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektörlerinin bileşenlerini bulalım.

ÇÖZÜM 16: Uzayda $\vec{a} = (-1, -2, 3)$ ve $\vec{b} = (3, -4, 2)$ vektörleri için,

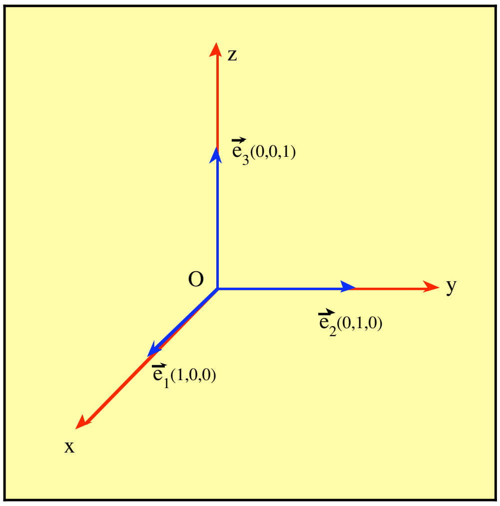
$2\vec{a} = 2\,(-1, -2, 3) = (-2, -4, 6)$ ve $3\vec{b} = 3\,(3, -4, 2) = (9, -12, 6)$ vektörüdür.

$2\vec{a} - 3\vec{b} = (-2, -4, 6) - (9, -12, 6) = (-2 - 9, -4 + 12, 6 - 6) = (-11, 8, 0)$ vektörü olur.

VIII. Bir vektörün standart taban vektörlerine göre ifadesi

Analitik uzayda, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ve $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ vektörlerine **standart taban** (baz) **vektörleri** denir. (Şekil 2.11) deki standart taban vektörleri, sıra ile 0x, 0y ve 0z eksenleri üzerindedir.

Standart taban vektörlerinin başlangıç noktaları orijindir. Yönleri, eksenlerin pozitif yönünde olup uzunlukları bir birimdir.



Şekil 2.11

Uzayda verilen $\vec{P} = (a, b, c)$ vektörünü $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vektörleri cinsinden yazalım.

(Şekil 2.12) de,

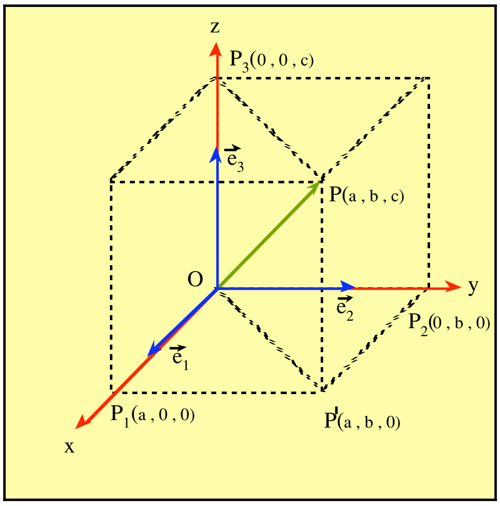
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$,

$\overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}\right) + \overrightarrow{OP_3}$,

$\overrightarrow{OP} = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$,

$\overrightarrow{OP} = a\,(1, 0, 0) + b\,(0, 1, 0) + c\,(0, 0, 1)$,

$\overrightarrow{OP} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ şeklinde yazılır.



Şekil 2.12

Uzayda bir $\vec{a}$ vektörü, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vektörlerinin lineer bileşeni olarak yazılabildiği gibi, analitik uzayda taban oluşturan ve birbirinden bağımsız üç vektörün lineer bileşeni olarak da yazılabilir.

ÖRNEK 17: Uzayda verilen $\vec{a} = (3, 4, -1)$ vektörünü standart taban vektörleri cinsinden yazalım.

ÇÖZÜM 17: Uzayda verilen $\vec{a} = (3, 4, -1)$ vektörünü $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ standart taban vektörleri cinsinden yazabiliriz.

ÖRNEK 18

Uzayda verilen $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ vektörünü bileşenleri cinsinden yazalım.

ÇÖZÜM 18

Uzayda verilen $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ vektörünü bileşenleri cinsinden yazmak için,

$\vec{a} = 2(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 5\,(0, 0, 1)$ $\quad \vec{a} = (2, 0, 0) + (0, -1, 0) + (0, 0, 5)$

şeklinde yazabiliriz. Bu da, $\vec{a} = (2, -1, 5)$ vektörü olur.

IX. Uzayda iki vektörün paralelliği

$\vec{a}$, $\vec{b} \in V$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ ve $\vec{b} \neq \vec{0}$ olsun, $\vec{a} = k\vec{b}$ olacak şekilde bir k reel sayısı varsa, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerine, **paralel vektörler** denir. $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ ile gösterilir.

Vektörlerdeki paralellik tanımını, vektörlerin bileşenleri cinsinden ifade edelim.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olsun. $\vec{a} = k\vec{b}$ olduğundan $(a_1, a_2, a_3) = k\,(b_1, b_2, b_3)$ olur.

Buradan, $k = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ bulunur. Bu eşitliğe iki vektörün **paralellik şartı** denir.

İki vektörün paralel olması için karşılıklı birleşenlerin oranları eşit olmalıdır. Paralel vektörlerin doğrultuları aynıdır. Uzunlukları farklı, yönleri ters olabilir.

ÖRNEK 19

Uzayda verilen $\vec{a} = (-1, 2- -3)$ ve $\vec{b} = (-3, 6, -9)$ vektörlerinin paralel olup olmadığını bulalım.

ÇÖZÜM 19

Verilen $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin paralel olabilmesi için karşılıklı bileşenleri arasında $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$ bağıntısı olmalıdır.

$\frac{-3}{-1} = \frac{6}{2} = \frac{-9}{-3} = 3$ bağıntısı olduğundan, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri birbirine paraleldir.

X. İç çarpım fonksiyonu ve Öklid iç çarpım işlemi

R^3 te verilen iki vektörü bir reel sayıya karşılık getiren $f : R^3 x R^3 \rightarrow R$ yani $f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \,.\, \vec{b}$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, f fonksiyonuna R^3 te bir reel **iç çarpım fonksiyonu** (işlemi) denir. $f(\vec{a}, \vec{b})$ değerine de $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörünün **iç çarpımı** denir.

İç çarpım fonksiyonların özelikleri,

a. Her $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ için $f(a, b) = f(b, a)$ dır. (Simetri özeliği)

b. Her $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ ve her $m, n \in R$ için,

$f(m\vec{a} + n\vec{b}, \vec{c}) = mf(\vec{a}, \vec{c}) + nf(\vec{b}, \vec{c})$ dir (iki lineerlik özeliği)

c. $\vec{a} = \vec{0}$ ise $f(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ ve $\vec{a} \neq \vec{0}$ ise $f(\vec{a}, \vec{a}) > 0$ dır. (pozitif tanımlılık özeliği)

Her $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ için $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere

$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \,.\, \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + a_3 . b_3$ şeklinde tanımlı vektör çarpımına, R^3 te bir reel **Öklid iç çarpım fonksiyonu** veya **iç çarpım işlemi** denir.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri verildiğinde,

$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \,.\, \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + a_3 . b_3$ değerine, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin **Öklid iç çarpımı adı** verilir.

ÖRNEK 20

Uzayda $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ve $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ vektörleri veriliyor.

Bunların Öklid iç çarpımlarını hesaplayalım.

ÇÖZÜM 20: Uzayda verilen $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ve $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ vektörleri için,

$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \,.\, \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1\,(-1) + (-3)\,2 + 2\,.1 = -1 - 6 + 2 = -5$ olur.

XI. Bir vektörün normu (uzunluğu)

Norm işlemi, vektörün uzunluğunu veren bir işlemdir.

$\|\vec{a}\|$ reel sayısına, $\vec{a}$ vektörünün uzunluğu ya da normu denir.

R^3 te herhangi bir $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörü için, $\vec{a}$ vektörünün normu $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ yada $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ vektörüdür.

ÖRNEK 21

Uzayda verilen $\vec{a} = (2, 4, -4)$ vektörünün normu (boyu)nun kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 21

Verilen vektörün normunu bulmak için $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ifadesinden,

$\|\vec{a}\| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$ birim olur.

XII. Birim vektör

Uzunluğu bir birim olan vektöre, birim vektör denir.

Uzayda verilen bir $\vec{a}$ vektörü yönünde ve doğrultusundaki birim vektör $\vec{u}$ ise $\vec{a} = k\vec{u}$ vektörüdür $(k \in R^+)$ dir. Her iki tarafın normunu alırsak;

$\|\vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$ olur. $\|\vec{u}\| = 1$ olduğundan, $\|\vec{a}\| = k \cdot 1 = k$ olur.

$\vec{a} = k\vec{u}$ ise $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{k}$ vektörüdür. $k = \|\vec{a}\|$ olduğundan,

$\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ vektörü olarak bulunur.

ÖRNEK 22

Uzayda $\vec{a} = (4, -2, 4)$ vektörü veriliyor. $\vec{a}$ vektörü yönünde ve doğrultusundaki birim vektörü bulalım.

ÇÖZÜM 22

vektörü yönünde ve doğrultusundaki birim vektör $\vec{u}$ ise

$\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \dfrac{(4, -2, 4)}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \dfrac{(4, -2, 4)}{\sqrt{36}} = \dfrac{(4, -2, 4)}{6} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ olur.

XII. Uzayda iki vektör arasındaki açı

$\vec{a}, \vec{b} \in R^3$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri verilsin. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı θ ise

$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| \cos\theta$ dir. Buradan $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\| . \|\vec{b}\|}$ dir.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olduğundan,

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$ ifadesi yazılır.

$\vec{a} \perp \vec{b}$ ise $\theta = 90°$ ve $\cos\theta = 0$ olduğundan, $\vec{a} . \vec{b} = 0$ dır.

Karşıt olarak, $\vec{a} \neq 0$ ve $\vec{b} \neq 0$ iken $\vec{a} . \vec{b} = 0$ ise $\vec{a} \perp \vec{b}$ vektörüdür.

ÖRNEK 23

Uzayda, $\vec{a} = (4, 2, -2)$ ve $\vec{b} = (1, 2, 1)$ vektörleri veriliyor. Bu vektörler arasındaki açının kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 23

Verilen $\vec{a} = (4, 2, -2)$ ve $\vec{b} = (1, 2, 1)$ vektörleri arasındaki açı θ ise

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\| . \|\vec{b}\|}$ ifadesinden,

$$\cos\theta = \frac{(4)(1) + (2)(2) + (-2)(1)}{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-2)^2}\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{4 + 4 - 2}{\sqrt{16 + 4 + 4}\sqrt{1 + 4 + 1}}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{24} . \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{144}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ olduğundan, $\theta = 60°$ olur.

ÖRNEK 24: Uzayda, $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ve $\vec{b} = (2, -4, 1)$ vektörleri veriliyor. Bu vektörlerin dik olup olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM 24: Uzayda verilen $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ve $\vec{b} = (2, -4, 1)$ vektöründe,

$\vec{a} . \vec{b} = (1, 1, 2) . (2, -4, 1) = 1. 2 + (1)(-4) + 2.1 = 2 - 4 + 2 = 0$ dır.

$\vec{a} . \vec{b} = 0$ olduğundan, $\vec{a} \perp \vec{b}$ vektörü olur.

5. UZAYDA DOĞRULAR

I. Düzlemde doğrular

Düzlemde verilen iki noktadan, bir doğrunun geçtiğini, daha önceki bölümlerde gördük.

$k \in R$ olmak üzere düzlemde verilen, $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun;

a. Kartezyen denklemi : $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

b. Vektörel denklemi: $(x, y) = (x_1, y_1) + k(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

c. Parametrik denklemi: $\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) \end{cases}$ biçiminde yazılabilir.

II. Uzayda doğrular

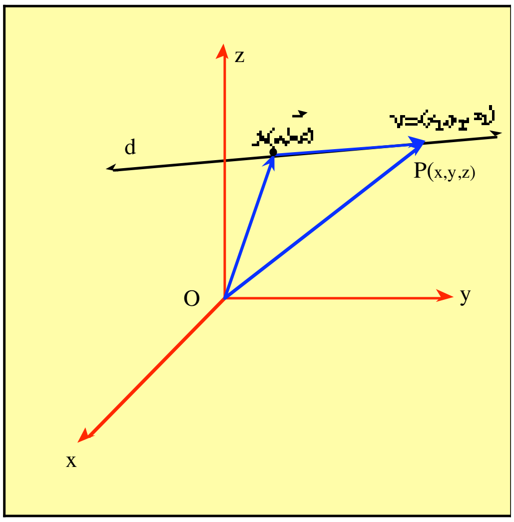
Uzayda bir d doğrusu ile bir $\vec{v}$ vektörü verildiğinde, $\vec{v}$ vektörü d doğrusuna paralel ise $\vec{v}$ vektörüne d doğrusunun doğrultman vektörü denir.

$\vec{v}$ doğrultman vektörü ile d doğrusunun doğrultuları aynıdır. Doğrultman vektörünün yönü, her iki yönden biri olabilir.

III. Bir noktadan geçen ve bir vektöre paralel olan doğrunun denklemi

a. Doğrunun vektörel denklemi

Bir A (a, b, c) noktasından geçen, verilen bir $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ vektörüne paralel olan doğru, d doğrusu olsun. $\vec{v}$ vektörü d doğrusunun doğrultman vektörüdür. (Şekil 2.13) Verilen bir A (a, b, c) noktasından geçen doğrultman vektörü $\vec{v} = (x, y, z)$ olsun. d doğrusu üzerinde P(x, y, z) noktasını alalım. $\vec{v}$ vektörü $\overrightarrow{AP}$ vektörüne paraleldir. $\lambda \in R$ olmak üzere, $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$ denklemine d doğrusunun **vektörel denklemi** denir.



Şekil 2.13

b. Doğrunun parametrik denklemi

Şekil 2. 13' te paralelkenar kuralına göre,

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}$ vektörüdür.

Bu vektörü bileşenleri cinsinden yazarsak,

$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda\,(x_1, y_1, z_1)$

$(x, y, z) = (a + \lambda x_1, b + \lambda y_1, c + \lambda z_1)$ elde edilir. Vektörlerin eşitliğinden,

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \lambda x_1 \\ y &= b + \lambda y_1 \\ z &= c + \lambda z_1 \end{aligned}\right\}$$ şeklinde yazılabilir.

Bu denklem sistemine d doğrusunun **parametrik denklemi** denir.

c. Doğrunun kartezyen denklemi

d doğrusunun parametrik denklemini oluşturan denklemlerin her birinden λ

çekilirse, $\dfrac{x-a}{x_1} = \dfrac{y-b}{y_1} = \dfrac{z-c}{z_1} = \lambda$ bulunur.

Bu denkleme de d doğrusunun **kartezyen denklemi** veya **nokta koordinatlarına göre denklemi** denir.

Burada x_1, y_1, z_1 sayıları doğrultman vektörünün bileşenleri, a, b, c sayıları da doğrunun geçtiği noktalardan biri olan A noktasının bileşenleridir.

Uzayda A(a, b, c) noktasından geçen ve verilen bir $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ vektörüne paralel olan doğrunun kartezyen denklemi $\dfrac{x-a}{x_1} = \dfrac{y-b}{y_1} = \dfrac{z-c}{z_1}$ dir.

ÖRNEK 25

Uzayda, A (2, 1, 3) noktasındana geçen ve $\vec{v} = (1, 3, 4)$ vektörüne paralel olan doğrunun;

a. Kartezyen denklemini,

b. Parametrik denklemini,

c. Vektörel denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 25: **a:** Doğrunun kartezyen denklemi, $\dfrac{x-a}{x_1} = \dfrac{y-b}{y_1} = \dfrac{z-c}{z_1}$

ifadesinden, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ olur.

b. Doğrunun parametrik denklemi:

$x = a + \lambda x_1$ ise $x = 2 + \lambda$ veya $x = \lambda + 2$
$y = b + \lambda y_1$ ise $y = 1 + 3\lambda$ veya $y = 3\lambda + 1$
$z = c + \lambda z_1$ ise $z = 3 + 4\lambda$ veya $z = 4\lambda + 3$ olur.

c. Doğrunun vektörel denklemi:

Doğru üzerinde herhangi bir nokta P(x, y, z) ise $\overrightarrow{AP} \,//\, \vec{v}$ vektörüdür.

$\lambda \in R$ için doğrunun vektörel denklemi , $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$ olduğundan,

$(x - 2, y - 1, z - 3) = \lambda (1, 3, 4)$ olur.

ÖRNEK 26: Uzayda parametrik denklemi, $x = 2 + \lambda$, $y = 3 + 2\lambda$, $z = 4 + 3\lambda$ olan doğrunun;

a. Doğrultman vektörünü,
b. Geçtiği noktalardan birinin koordinatlarını,
c. Kartezyen denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 26

a. Verilen doğrunun doğrultan vektörü, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ vektörüdür.
b. Doğrunun geçtiği noktalardan biri, A(2, 3, 4) noktasıdır.
c. Doğrunun kartezyen denklemi :

$x = 2 + \lambda$ ise $\lambda = x - 2$ dir. $y = 3 + 2\lambda$ ise $\lambda = \dfrac{y - 3}{2}$ dir.

$z = 4 + 3\lambda$ ise $\lambda = \dfrac{z - 4}{3}$ dir. Buradan, $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 3}{2} = \dfrac{z - 4}{3} = \lambda$ olur.

ÖRNEK 27: Uzayda denklemi $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 0}{5} = \dfrac{z - 4}{0} = \lambda$ olan doğrunun ;

a. Doğrultman vektörünü,
b. Geçtiği noktalardan herhangi iki noktanın koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM 27

a : Uzayda verilen doğrunun denklemi $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 0}{5} = \dfrac{z - 4}{0} = \lambda$ ise doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{v} = (3, 5, 0)$ vektörüdür.

b. Doğru denkleminden, x , y ve z değerlerini bulmak istersek,

$x - 2 = 3\lambda$ ise $x = 2 + 3\lambda$
$y - 0 = 5\lambda$ ise $y = 5\lambda$
$z - 4 = 0$ ise $z = 4$ olur.

Doğru üzerindeki noktalar $(x , y, z) = (2 + 3\lambda, 5\lambda, 4)$ tür.
Bu noktalardan herhangi ikisini bulmak için,
$\lambda = 1$ ise $A(2+3, 5, 4)$ yani $A(5, 5, 4)$ ve
$\lambda = 2$ ise $B(2 + 6, 10, 4)$ yani $B(8, 10, 4)$ noktaları olur.

IV. Uzayda iki noktası verilen doğrunun denklemi

Uzayda $A(x_1 , y_1, z_1)$ ve $B(x_2 , y_2, z_2)$ gibi iki nokta veriliyor. A ve B noktalarından geçen d doğrusu üzerinde herhangi bir nokta $P(x, y, z)$ olsun. $\overrightarrow{AB}$ vektörü, d doğrusunun bir doğrultman vektörüdür. (Şekil 2. 14) te,

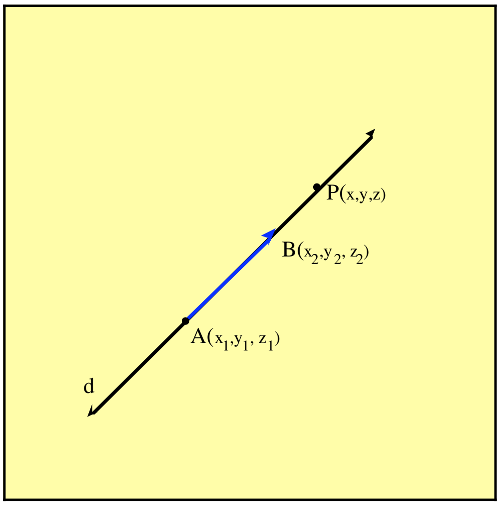
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ve

$\overrightarrow{AP} = (x - x_1 , y - y_1 , z - z_1)$ dir.

$\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AP}$ olduğundan ve $\lambda \in R$ için

$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ doğrunun vektörel denklemidir.

Bu bağıntıyı bileşenleri cinsinden yazarsak,



Şekil 2.14

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ dir. Buradan,}$$

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x_1) \text{ ise } x = x_1 + \lambda (x_2 - x_1)$$

$$y - y_1 = \lambda (y_2 - y_1) \text{ ise } y = y_1 + \lambda (y_2 - y_1)$$

$$z - z_1 = \lambda (z_2 - z_1) \text{ ise } z = z_1 + \lambda (z_2 - z_1) \text{ olur.}$$

Bu denklem sistemi, A ve B noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemidir.

Doğrunun parametrik denkleminden λ değerini bulalım.

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} , \quad \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} , \quad \lambda = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \text{ bulur. Bu da doğrunun kartezyen denklemidir.}$$

Uzayda $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen doğrunun kartezyen denklemi, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ dir.

ÖRNEK 28: Uzayda $A(1, 2, 3)$ ve $B(4, 4, 4)$ noktalarından geçen doğrunun:

a. Kartezyen denklemini,

b. Parametrik denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 28: a Uzayda, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen

AB doğrusunun kartezyen denklemi, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ dir.

Buna göre uzayda, $A(1, 2, 3)$ ve $B(4, 4, 4)$ noktalarından geçen AB doğrusunun kartezyen denklemi:

$$\frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{z - 3}{4 - 3} \quad ; \quad \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{1}$$ olur.

b. Uzayda, AB doğrusunun parametrik denklemini yazalım. AB doğrusunun kartezyen denkleminde eşitliğe λ dersek, $(\lambda \in R)$

$\dfrac{x - 1}{3} = \lambda$ ise $x = 1 + 3\lambda$, $\dfrac{y - 2}{2} = \lambda$ ise $y = 2 + 2\lambda$, $z - 3 = \lambda$ ise $z = 3 + \lambda$ olur.

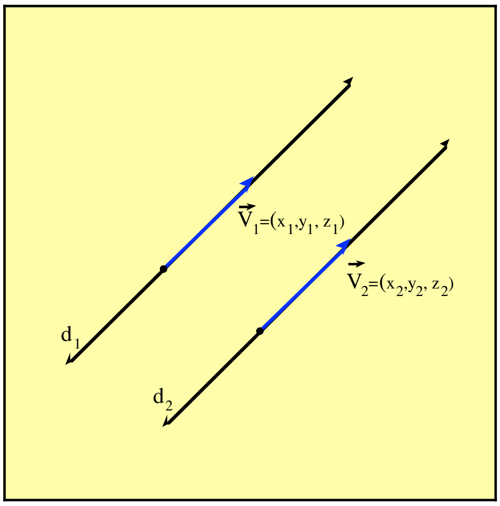
V. Uzayda verilen iki doğrunun birbirine paralel olma durumu

Uzayda verilen d_1 ve d_2 doğruların denklemleri,

$$\frac{x - a_1}{x_1} = \frac{x - b_1}{y_1} = \frac{z - c_1}{z_1}$$ ve

$$\frac{x - a_2}{x_2} = \frac{x - b_2}{y_2} = \frac{z - c_2}{z_2}$$ olsun.

d_1 doğrusunun d_2 doğrusuna paralel olması için doğruların doğrultman vektörlerinin birbirine paralel olması gerekir (Şekil 2.15) $d_1 // d_2$ ise $\vec{v_1} // \vec{v_2}$ dir. Böylece $\vec{v_1} = \lambda\vec{v_2}$ vektörü olur. $(\lambda \in R)$ Bu durumda $d_1 // d_2$ ise $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = \lambda$ dır. Bu denkleme doğruların paralellik şartı denir.



Şekil 2.15

d_1 doğrusunun d_2 doğrusuna paralel olması için doğrultman vektörlerinin paralel olması gerekir. Doğrultman vektörleri,

$\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ ise paralellik şartından,

$d_1 // d_2$ ise $\vec{v_1} // \vec{v_2}$ dir. Buradan $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ olur.

ÖRNEK 29: Uzayda, $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{5}$ ve $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-0}{15}$ doğruları veriliyor. Bu doğruların birbirine paralel olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM 29: Verilen $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{5}$ doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{v_1}=(1, 2, 5)$ vektörüdür. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-0}{15}$ doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{v_2}=(3, 6, 15)$ vektörüdür. Bu doğruların birbirine paralel olması için,
$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{5}{15}$ olmalıdır. Bu şart sağlandığından verilen doğrular birbirine paraleldir.

VI. Uzayda verilen iki doğrunun birbirine dik olma durumu

Uzayda verilen d_1 ve d_2 doğrularının birbirine dik olması için doğruların ve doğrultman vektörlerinin birbirine dik olması gerekir.

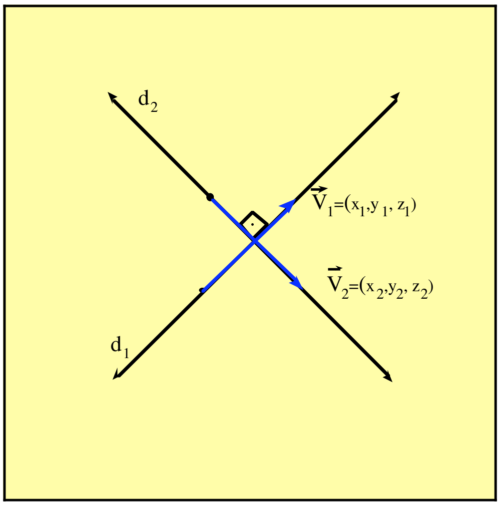
$d_1 \perp d_2$ ise $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ vektörüdür. (Şekil 2.16) da

$\vec{v_1}=(x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{v_2}=(x_2, y_2, z_2)$ olsun.

$d_1 \perp d_2$ ise $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ ve $\vec{v_1} . \vec{v_2} = 0$ dır.

Öyleyse, $x_1 . x_2 + y_1 . y_2 + z_1 . z_2 = 0$ olmalıdır.

Bu şarta doğruların diklik şartı denir.



Şekil 2.16

d_1 doğrusunun d_2 doğrusuna dik olması için doğrultman vektörlerin birbirine dik olmalıdır. Doğruların doğrultman vektörleri

$\vec{v_1}=(x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{v_2}=(x_2, y_2, z_2)$ olsun. Buna göre, diklik şartından,

$d_1 \perp d_2$ ise $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ ve $\vec{v_1} . \vec{v_2} = 0$ olduğundan,

$x_1 . x_2 + y_1 . y_2 + z_1 . z_2 = 0$ olur.

ÖRNEK 30: Uzayda, $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-3}{-2}$ ve $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{-1}$ doğruları veriliyor. Bu doğruların birbirine dik olup olmadıklarını araştıralım.

ÇÖZÜM 30: Uzayda denklemleri verilen doğruların birbirine dik olması için bunların doğrultman vektörleri olan $\vec{v_1}=(4, -7, -2)$ ve $\vec{v_2}=(3, 2, -1)$ vektörleri birbirine dik olmalıdır.

$d_1 \perp d_2$ ise $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ dir. Böylece, $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$ olmalıdır.

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 4(3) + (-7)(2) + (-2)(-1) = 12 - 14 + 2 = 0$ olduğundan ve

diklik şartını sağladığından verilen doğrular birbirine dik olur.

VII. Uzayda verilen iki doğru arasındaki açının kosinüsü

Uzayda verilen iki doğru arasındaki açının ölçüsü, bu doğruların doğrultman vektörleri arasındaki açının ölçüsüne eşittir.

Uzayda denklemleri, $\frac{x - a_1}{x_1} = \frac{y - b_1}{y_1} = \frac{z - c_1}{z_1}$ ve $\frac{x - a_2}{x_2} = \frac{y - b_2}{y_2} = \frac{z - c_2}{z_2}$ olan

d_1 ve d_2 doğruların doğrultman vektörleri,

$\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleridir.

$\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü θ olduğuna göre, $\cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\|}$ olur.

d_1 ve d_2 doğruları arasındaki açı, bu doğruların $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ doğrultman vektörleri arasındaki açıya eşittir. Buna göre,

$\cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\|}$ dir.

ÖRNEK 31 : Uzayda denklemleri, $\frac{x + 2}{1} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z}{2}$ ve $\frac{x}{3} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z + 4}{6}$

olan d_1 ve d_2 doğruları arasındaki açının kosinüsünü bulalım.

ÇÖZÜM 31: d_1 ve d_2 doğruları arasındaki açı, bu doğruların $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ doğrultman vektörleri arasındaki açıdır.

d_1 doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{v_1} = (1, 2, 2)$ vektörüdür.

d_2 doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{v_2} = (3, 2, 6)$ vektörüdür.

verilen doğrular arasındaki açı θ ise $\cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\|}$ ifadesinden,

$$\cos\theta = \frac{1.3 + 2.2 + 2.6}{\sqrt{1 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{3 + 4 + 12}{\sqrt{1 + 4 + 4}\ \sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{19}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \frac{19}{3.7}$$

$\cos\theta = \frac{19}{21}$ olur.

ÖRNEK 32: Parametrik denklemi $x = 3+\lambda$, $y = 2+\lambda$, $z = 1+n\lambda$ olan d_1 doğrusu ile parametrik denklemi, $x = 3+k$, $y = 4 + k$, $z = 5$ olan d_2 doğrusu veriliyor. Bu doğrular arasındaki açının ölçüsü 60° olduğuna göre "n" nin pozitif değerini bulalım.

ÇÖZÜM 32: d_1 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{v_1} = (1, 1, n)$ vektörüdür. d_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{v_2} = (1, 1, 0)$ vektörüdür.

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ dir. $\cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\|}$ ifadesinden,

$$\frac{1}{2} = \frac{1.1 + 1.1 + n.0}{\sqrt{1^2+1^2+n^2}\,\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \quad ; \quad \frac{1}{2} = \frac{1+1}{\sqrt{1+1+n^2}.\sqrt{1+1}}$$

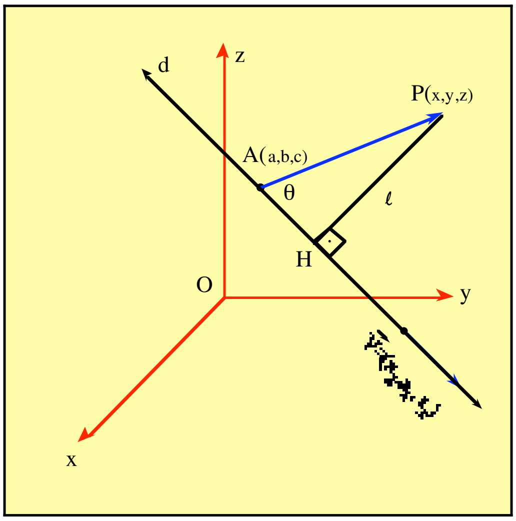
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{2+n^2}.\sqrt{2}} \quad ; \quad 4 = \sqrt{4+2n^2} \quad ; 16 = 4+2n^2$$

$2n^2 = 12$; $n^2 = 6$ ise $n = \pm\sqrt{6}$ dır. n nin pozitif değeri ise $n = \sqrt{6}$ olur.

VIII. Uzayda verilen bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı

Uzayda, denklemi $\frac{x - a}{x_1} = \frac{y - b}{y_1} = \frac{z - c}{z_1}$ olan d doğrusu ve bu doğru dışında verilen nokta P(x, y, z) olsun. (Şekil 2.17) de, P noktasının d doğrusuna uzaklığı $|PH| = \ell$ olsun. d doğru üzerinde alınan A(a, b, c) noktası olmak üzere $\vec{AP}$ vektörü ile $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü θ olsun. AHP dik üçgeninde,

$|PH| = \ell = \|\vec{AP}\| . \sin\theta$ dır.



Şekil 2.17

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad \text{ve} \quad \cos\theta = \frac{\vec{v} . \vec{AP}}{\|\vec{v}\| . \|\vec{AP}\|} \quad \text{olduğundan,}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v} \ \vec{AP}}{\|\vec{v}\| . \|\vec{AP}\|}\right)^2} = \frac{\sqrt{\|\vec{v}\|^2 \ \|\vec{AP}\|^2 - (\vec{v} . \vec{AP})^2}}{\|\vec{v}\| . \|\vec{AP}\|} \quad \text{dir.}$$

Bulunan bu değer yerine yazılır gerekli kısaltmalar yapılırsa.

$$|PH| = \ell = \frac{\sqrt{\|\vec{v}\|^2 . \|\vec{AP}\|^2 - (\vec{v} . \vec{AP})^2}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK 33: Uzayda verilen A(1, 2, 3) noktasının, denklemi, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-1}$ olan doğruya olan uzaklığını bulalım.

ÇÖZÜM 33: Verilen doğru üzerinde bir P noktası alalım. P noktasının koordinatları P (2, 1, 3) olsun. $\overrightarrow{AP}$ vektörünü ve $\|AP\|$ değerini bulalım.

$\overrightarrow{AP}=(2-1,\ 1-2,\ 3-3)=(1,-1,0)$ vektörüdür.

$\|AP\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ birimdir.

Verilen doğrunun doğrultman vektörü $\vec{v}=(1,4,-1)$ vektörüdür.

$\|\vec{v}\|=\sqrt{(1)^2+(4)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ birimdir.

$\vec{v}\,.\,\overrightarrow{AP}=(1)(-1)+(4)(-1)+(-1)(0)=-1-4=-5$ tir.

Bu değerler $\ell=\dfrac{\sqrt{\|\vec{v}\|^2.\|\overrightarrow{AP}\|^2-(\vec{v}.\overrightarrow{AP})^2}}{\|\vec{v}\|}$ ifadesinde yerine

yazılırsa $\ell=\dfrac{\sqrt{(3\sqrt{2})^2.(\sqrt{2})^2-(5)^2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{18\,.\,2-25}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{36-25}}{3\sqrt{2}}$

$\ell=\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\dfrac{11}{18}}$ birim olur.

ÖRNEK 34: Uzayda, A (3, -1, 2) noktasının, $x=2+\lambda$, $y=-1-2\lambda$, $z=1+2\lambda$ parametrik denklemi ile verilen doğruya olan uzaklığını bulalım.

ÇÖZÜM 34: Verilen doğru üzerindeki P noktasının koordinatları A(2, -1, 1) dir.

$\overrightarrow{AP}=(2-3,\ -1+1,\ 1-2)=(-1,0,-1)$ vektörüdür.

$\|\overrightarrow{AP}\|=\sqrt{(-1)^2+(0)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$ birimdir.

Doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{V}=(1,-2,2)$ vektörüdür.

$\|\vec{V}\|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$ birimdir.

$\vec{V}\,.\,\overrightarrow{AP}=1\,(-1)+(-2)\,0+2\,(-1)=-1+0-2=-3$ tür.

$$\ell=\frac{\sqrt{\|\vec{V}\|^2.\|\overrightarrow{AP}\|^2-(\vec{V}.\overrightarrow{AP})^2}}{\|\vec{v}\|}=\frac{\sqrt{(3)^2.(\sqrt{2})^2-(-3)^2}}{3}$$

$\ell=\dfrac{\sqrt{9.\,2-9}}{3}=\dfrac{\sqrt{18-9}}{3}=\dfrac{\sqrt{9}}{3}=\dfrac{3}{3}=1$ birim olur.

6. UZAYDA DÜZLEMLER

I. Uzayda düzlemler

Geometride, düzlem tanımsız bir terimdir. Her doğrultuda sınırsız uzanan bir yüzey olarak düşünebiliriz. Durgun suyun yüzeyi, masanın yüzü düzleme birer örnektir. Geometride düzlemi birer paralelkenar olarak çizeceğiz. Köşesinde E, P ve θ gibi harfler vererek düzlemi adlandıracağız. Daha önceki geometri derslerinde gördüğümüz gibi düzlemi bazı aksiyomlar ile belirtebiliriz. Bunlar;

a. Doğrusal olmayan üç nokta, bir düzlem belirtir.

b. Bir doğru ile dışındaki bir nokta, bir düzlem belirtir.

c. Paralel iki doğru, bir düzlem belirtir.

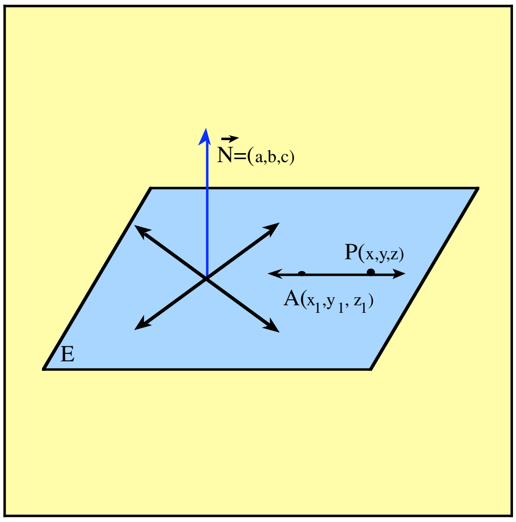
d. Kesişen iki doğru, bir düzlem belirtir.

Bir doğru düzleme dik ise düzlemde bulunan bütün doğrulara da dik olur. Düzlemin bütün doğrularına dik olan doğruya, düzlemin normal doğrusu denir.

Bir doğru üzerinde birbirine zıt olan iki birim vektör vardır. Bu birim vektörlere, düzlemin birim normal vekörleri denir.

II. Uzayda verilen bir noktadan geçen ve verilen bir vektöre dik olan düzlemin denklemi

Uzayda verilen bir noktanın koordinatları $A(x_1,y_1,z_1)$ ve verilen bir vektör $\vec{N}=(a, b, c)$ vektörü olsun. A noktasından geçen, $\vec{N}$ vektörüne dik olan, E düzleminin herhangi bir noktasının koorinatları P(x, y, z) olsun.



Şekil 2.18

$\vec{N} \perp E$ olduğundan, $\vec{N}$ vektörü düzlem içindeki bütün doğrulara diktir. (Şekil 2.18) Böylece, $\vec{N} \perp \overrightarrow{AP}$ olur.

$\vec{N} \perp \overrightarrow{AP}$ ise $\vec{N} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ dır.

$\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ ve

$\vec{N} = (a, b, c)$ vektörü olduğundan

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{AP} = a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ olmalıdır.

$ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 = 0$

$ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$ dır.

$-(ax_1 + by_1 + cz_1) = d$ dersek, $ax + by + cz + d = 0$ olur.

Bu denklem, istenilen düzlemin denklemidir. Bu denkleme düzlemin kartezyen denklemi denir. Denklemdeki a,b,c sayıları düzleme dik olan $\vec{N}$ vektörünün bileşenleridir.

Uzayda bütün düzlemlerin denklemleri, x, y ve z ye göre birinci dereceden birer denklemdir. Bu denklem, $ax + by + cz + d = 0$ şeklindedir.

$ax + by + cz + d = 0$ denkleminde hangi değişkenin kat sayısı sıfır ise verilen denklemin belirttiği düzlem, sıfır değişkenle ifade edilen eksene paraleldir.

ÖRNEK 35

Uzayda A(1, 2, 3) noktasından geçen ve $\vec{N} = (3, -1, 4)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 35

Uzayda, A noktasının koordinatları A(1, 2, 3) ve düzlemin nomal vektörü $\vec{N} = (3, -1, 4)$ vektörüdür. Düzlem üzerinde herhangi bir P noktası alalım.

P noktasının koorinatları P(x, y, z) olsun.

$\overrightarrow{AP}$ vektörü, E düzlemi içindedir.

$\vec{N} \perp E$ ise $N \perp \overrightarrow{AP}$ ve $\vec{N} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ dır.

$\overrightarrow{AP} = (x - 1, y - 2, z - 3)$ olduğundan,

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{AP} = 3(x - 1) + (-1)(y - 2) + 4(z - 3) = 0$ dır.

$3x - 3 - y + 2 + 4z - 12 = 0$ olduğundan düzlemin denklemi

$3x - y + 4z - 13 = 0$ olur.

ÖRNEK 36

Uzayda, denklemi $3x - 2y + z + 4 = 0$ olan düzlemin normal vektörünü yazalım.

ÇÖZÜM 36

Uzayda, denklemi verilen düzlemin x, y ve z nin katsayıları sırasıyla 3, -2, 1 olduğundan, düzlemin normal vektörü, $\vec{N} = (3, -2, 1)$ olur.

ÖRNEK 37 : Uzayda, normal vektörü $\vec{N} = (1, 3, -5)$ olan düzlemin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 37: Normal vektörün bileşenleri, düzlem denkleminde x, y ve z nin katsayıları olduklarından, k bir parametre olmak üzere düzlemin genel denklemi $x + 3y - 5z + k = 0$ şeklindedir.

Burada k nın değeri, düzlemin geçtiği nokta ile belli olur.

ÖRNEK 38: Uzayda, A(2, -3, -1) noktası $2x - 3y + 5z + k = 0$ olan düzlem üzerinde ise “k”nin değerini bulalım.

ÇÖZÜM 38: A noktası düzlem üzerinde olduğundan, A noktasının koordinatları düzlem denklemini sağlar.

$2.2 - 3(-3) + 5(-1) + k = 0 \qquad 4 + 9 - 5 + k = 0 \qquad k = -8$ olur.

ÖRNEK 39: $x - 1 = 0$ denklemi veriliyor. Bu denklemin doğru üzerinde, analitik düzlemde ve analitik uzayda neyi belirttiğini açıklayalım.

ÇÖZÜM 39

$x - 1 = 0$ denklemi; doğru üzerinde bir nokta, analitik düzlemde bir doğru, analitik uzayda bir düzlem belirtir.

ÖRNEK 40

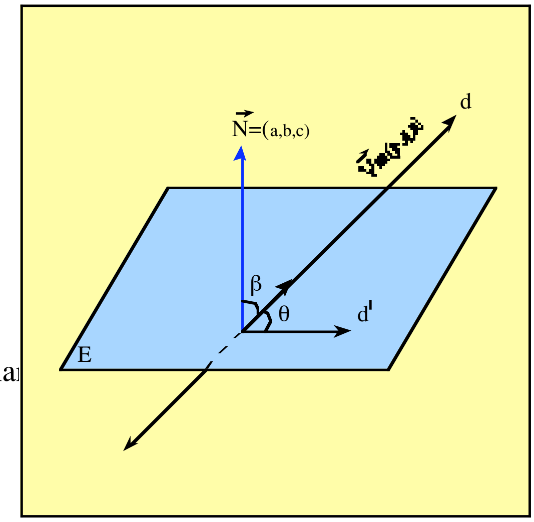
Uzayda, $3x - 4z - 6 = 0$ denklemi ile verilen düzlemin, analitik düzlemde, hangi eksene paralel olduğunu belirtelim.

ÇÖZÜM 40: Uzayda $3x - 4z - 6 = 0$ denklemi ile verilen düzlem, analitik uzayda y eksenine paraleldir. Çünkü y nin kat sayısı sıfırdır.

III. Uzayda, bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı

Uzayda, denklemi

$\dfrac{x - x_1}{p} = \dfrac{y - y_1}{q} = \dfrac{z - z_1}{r}$ olan d doğrusu ile denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan E düzlemi veriliyor (Şekil 2.19) da d doğrusunun, E düzlemi içindeki dik izdüşümü olan d´ doğrusu ile yaptığı θ açısına, d doğrusu ile E düzlemi arasındaki açı denir. d doğrusunun doğrultma vektörü, $\vec{V} = (p, q, r)$ ve E düzleminin normali, $\vec{N} = (a, b, c)$ vektörleridir.



Şekil 2.19

d doğrusu ile E düzlemi arasındaki açının ölçüsü θ ise d doğrusunun düzlemin normali ile yaptığı açının ölçüsü, $\beta = (90° - \theta)$ olur.

$$\cos\beta = \cos(90° - \theta) = \frac{\vec{V}\,.\,\vec{N}}{\|\vec{V}\|\,.\,\|\vec{N}\|} \text{ dir.}$$

$$\cos\beta = \cos(90° - \theta) = \sin\theta = \frac{p.a + q.b + r.c}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,.\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ olarak bulunur.}$$

Denklemi $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ olan doğru ile denklemi

$ax + by + cz + d = 0$ olan düzlem arasındaki açının ölçüsü

$$\sin\theta = \frac{p.a + q.b + r.c}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 41: Uzayda, denklemi $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+2}{1}$ olan doğru ile denklemi $x + y - z - 1 = 0$ olan düzlem arasındaki açının sinüsünü bulalım.

ÇÖZÜM 41: Uzayda verilen doğrunun doğrultman vektörü $\vec{V} = (-1, 0, 1)$ vektörüdür. Düzlemin normal vektörü $\vec{N} = (1, 1, -1)$ vektörüdür.

$$\sin\theta = \frac{\vec{V}\,.\,\vec{N}}{\|\vec{V}\|\,.\,\|\vec{N}\|} \text{ ifadesinden,}$$

$$\sin\theta = \frac{(-1).1 + 0.1 + 1(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(0)^2+(1)^2}\,.\,\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \frac{-1+0-1}{\sqrt{2}\,.\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{3} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 42: Uzayda, denklemi $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{-1}$ olan doğru ile denklemi $4x - 5y + 3z - 6 = 0$ olan düzlem arasındaki açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 42

Doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (7, 0, -1)$ vektörüdür. Düzlemin normali, $\vec{N} = (4, -5, 3)$ vektörüdür. Doğru ile düzlem arasındaki açının ölçüsü θ ise,

$$\sin\theta = \frac{\vec{V}\,.\,\vec{N}}{\|\vec{V}\|\,.\,\|\vec{N}\|} = \frac{7.4 + 0.(-5) + (-1).3}{\sqrt{(7)^2+(0)^2+(-1)^2}\,.\,\sqrt{(4)^2+(-5)^2+(3)^2}}$$

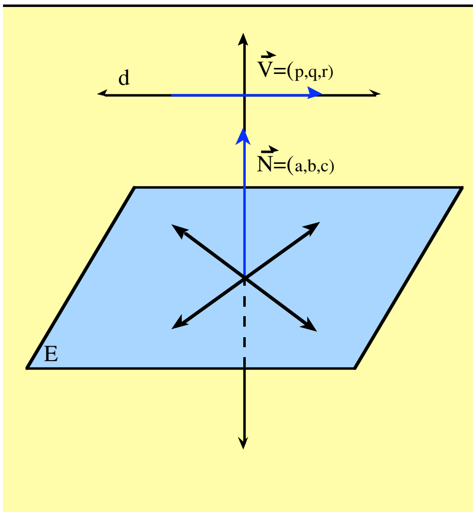
$$\sin\theta = \frac{28+0-3}{\sqrt{49+1}\,.\,\sqrt{16+25+9}} = \frac{25}{\sqrt{50}\,.\,\sqrt{50}} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \text{ dir.} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

ise $\theta = 30°$ olur.

IV. Uzayda doğru ile düzlemin paralel olma şartı

Uzayda, denklemi $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$,
olan d doğrusu ile denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan E düzlemi veriliyor.

d doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (p, q, r)$ vektörü ile E düzleminin normali olan $\vec{N} = (a, b, c)$ vektörleri birbirine dik ya da dik durumlu ise d doğrusu E düzlemine paraleldir denir. (Şekil 2.20)



Şekil 2.20

$\vec{N} \perp \vec{V}$ olduğundan, d// E dir.

Öyleyse, d // E ise $\vec{N} \perp \vec{V}$ dir.
$\vec{N} . \vec{V} = 0$ olur. Böylece, $\vec{N} . \vec{V} = a.\, p + b.\, q + c\, .\, r = 0$ bulunur.

Verilen doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (p, q, r)$ vektörü ve E düzleminin normali $\vec{N} = (a, b, c)$ vektörü ise $\vec{N} . \vec{V} = a.p + b.q + c.\, r$ dır.

Verilen doğru, verilen düzleme paralel ise $a.p + b.q + c.r = 0$ olur. Bu şarta doğrunun düzleme paralel olma şartı denir.

Denklemi $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ olan doğru ile denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan düzlemin denklemleri arasındaki bağıntı $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ ve $a.p + b.q + c.\, r = 0$ ise verilen doğru düzleme çakışıktır. Bu durumda doğru, verilen düzlemin içindedir.

ÖRNEK 43: Uzayda, denklemi $\frac{x - 4}{3} = \frac{y - 2}{5} = \frac{z}{r}$ olan d doğrusu ile denklemi $x - y + z + 3 = 0$ olan E düzlemi veriliyor. d doğrusunun E düzlemine paralel olması için “r” nin değerinin kaç olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 43

d doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (3, 5, r)$ vektörü, E düzleminin normal vektörü $\vec{N} = (1, -1, 1)$ vektörüdür.

d // E ise $\vec{V} \perp \vec{N}$ öyleyse, $\vec{V} . \vec{N} = 0$ dır.

$\vec{V} . \vec{N} = 3.1 + 5.(-1) + r.1 = 0$

$3 - 5 + r = 0$; $-2 + r = 0$; $r = 2$ olur.

V. Uzayda doğru ile düzlemin dik olma şartı

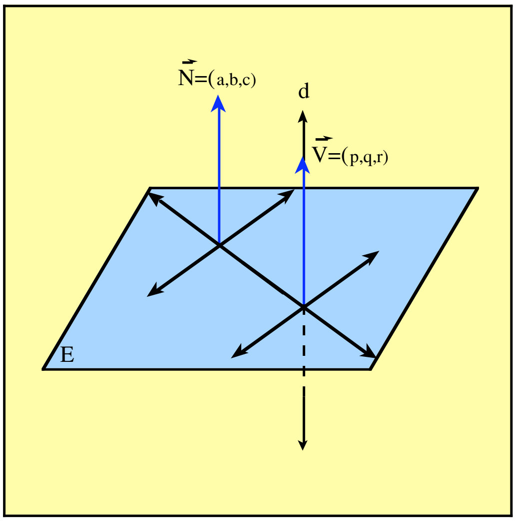
Uzayda, denklemi $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ olan d doğrusu ile denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan E düzlemi veriliyor.

Doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (p, q, r)$ vektörü ve düzlemin normal vektörü, $\vec{N} = (a, b, c)$ vektörüdür.

(Şekil 2.21) de, $d \perp E$ ise $\vec{V} // \vec{N}$ dir.

$\vec{V} = k.\vec{V}$ $(k \in R)$ vektörü olur.

Öyleyse, $d \perp E$ ise $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = k$ dır.



Şekil 2.21

Verilen doğrunun doğrultman vektörü $\vec{V} = (p, q, r)$ vektörü ve E düzleminin normal vektörü $\vec{N} = (a, b, c)$ vektörü ise verilen doğrunun E düzlemine dik olabilmesi için, $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = k$ $(k \in R)$ dır.Bu şarta doğrunun düzleme dik olma şartı denir.

ÖRNEK 44 : Uzayda, denklemi $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z}{6}$ olan doğrunun $x - y + 3z - 4 = 0$ denklemiyle verilen düzleme dik olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM 44: Doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (2, -2, 6)$ vektörüdür.
Düzlemin normal vektörü, $\vec{N} = (1, -1, 3)$ vektörüdür.

$\vec{V}$ ve $\vec{N}$ vektörlerinin bileşenleri oranlanırsa; $\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{6}{3} = 2$ dir.

Vektörlerin bileşenleri orantılı olduğundan $\vec{V} // \vec{N}$ dir. O halde, verilen doğru düzleme diktir.

VI. Uzayda doğru ile düzlemin ortak (kesim) noktasının koordinatlarını bulmak

Uzayda, denklemi verilen $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ doğrusu, denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan düzlemi kesiyorsa, doğru ile düzlemin bir ortak noktası vardır. Bu nokta doğrunun düzlemi kestiği noktadır. Bu ortak noktanın koordinatlarını bulalım.

Verilen $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r} = k$ $(k \in R)$ doğrusunun parametrik denklemlerini yazalım.

$x = x_1 + pk$, $y = y_1 + qk$, $z = z_1 + rk$ olur.
Ara kesit (ortak) noktası E düzleminin denklemini de sağlar.

Bu değerler E düzleminin denkleminde yerlerine yazılırsa,

$a(x_1 + pk) + b(y_1 + qk) + c(z_1 + rk) + d = 0$

$ax_1 + apk + by_1 + bqk + cz_1 + crk + d = 0$

$k(ap + bq + cr) = -(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)$

$k = \dfrac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{ap + bq + cr}$ değeri bulunur.

k nın bu değeri doğrunun parametrik denkleminde yerine yazılarak, doğru ile düzlemin kesim noktasının koordinatları (bileşenleri) bulunmuş olur.

Uzayda, verilen bir doğru ile bir düzlemin üç durumu vardır. Bunlar;

a. Uzayda verilen doğru, verilen düzleme paralel ise bunların kesim (arakesit) noktaları yoktur.

b. Uzayda verilen doğru, verilen düzlemin içinde ise düzlemin bir doğrusu olduğundan doğrunun her noktası düzleminde bir noktasıdır.

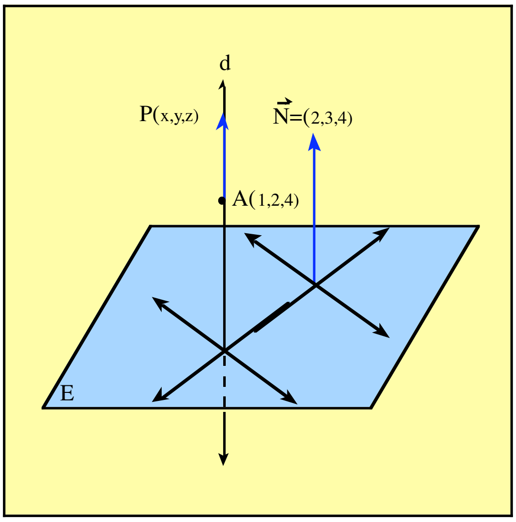
c. Uzayda verilen doğru, bu düzlemin içinde değil ve bu düzleme paralel değilse doğru düzlemi bir tek noktada keser. Bu nokta ortak (arakesit) noktasıdır.

ÖRNEK 45: Uzayda, verilen A(1, 2, 4) noktasından geçen, $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ denklemini ile verilen düzleme dik olan, doğrunun denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 45: A noktasından geçen d doğrusu, E düzlemine dik olduğundan, d doğrusu düzlemin normal vektörüne paraleldir. Yani d // $\vec{N}$ vektörüdür. d doğrusu üzerinde herhangi bir nokta P(x,y,z) olsun. A noktasının koordinatları A(1, 2, 4) olduğundan,

$\overrightarrow{AP} = (x - 1, y - 2, z - 4)$ vektörüdür.

(Şekil 2.22) de, $\vec{N} = (2, 3, 4)$ ve $\overrightarrow{AP} // \vec{N}$ vektörü olduğundan $\overrightarrow{AP}$ ve $\vec{N}$ vektörlerinin bileşenleri oranlanırsa, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-4}{4}$ olur. Bu denklem A (1,2,4) noktasından geçen E düzlemine dik olan d doğrusunun denklemidir.



Şekil 2.22

ÖRNEK 46: Uzayda, A(3, -1, 4) noktasından geçen ve $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+4}{-3}$ denklemi ile verilen d doğrusuna dik olan, düzlemin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 46: Uzayda, verilen $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+4}{-3}$ doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (2, -1, -3)$ vektörüdür. A(3, -1, 4) noktasından geçen, E düzlemin herhangi bir noktası P(x, y, z) olsun.

$\overrightarrow{AP}$ vektörünü taşıyan doğru E düzlemi içindedir. (Şekil 2.23) d ⊥ E ise $\vec{V} \perp E$ olduğundan, $\vec{V} = (2, -1, -3)$ doğrunun doğrultman vektörü E düzleminin $\overrightarrow{AP}$ vektörüne dik durumludur. Böylece, $\vec{V} \perp \overrightarrow{AP}$ vektörü olur.

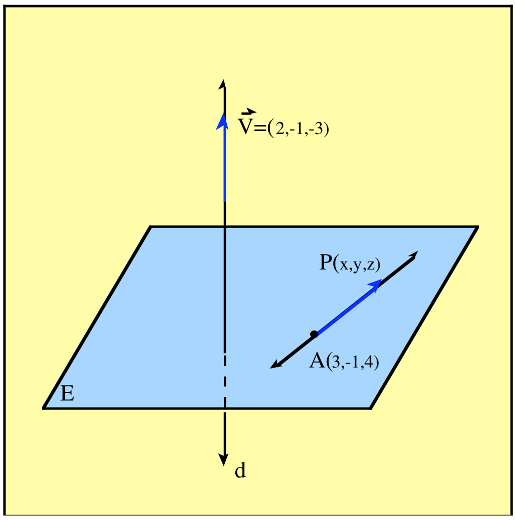
$\overrightarrow{AP} = (x - 3, y + 1, z - 4)$ vektörüdür. $\vec{V} . \overrightarrow{AP} = 0$ olduğundan,

$\vec{V} . \overrightarrow{AP} = 2(x - 3) + (-1)(y + 1) + (-3)(z - 4) = 0$ olmalıdır.

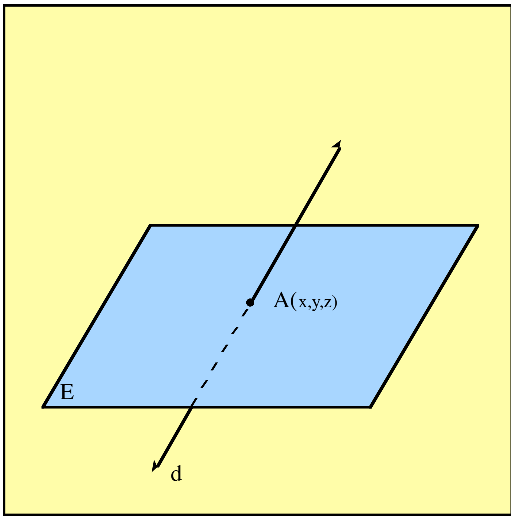
$2x - 6 - y - 1 - 3z + 12 = 0$

$2x - y - 3z + 5 = 0$ denklemi istenilen düzlemin denklemidir.

ÖRNEK 47 :Uzayda, denklemi $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z}{-2}$ olan d doğrusu ile denklemi $x - 2y + z + 9 = 0$ olan, E düzlemi veriliyor. d doğrusu ile E düzlemin ortak noktası olan A noktasının koordinatlarını bulalım (Şekil 2.24)



Şekil 2.23



Şekil 2.24

ÇÖZÜM 47: Uzayda verilen d doğrusunun parametrik denklemini yazalım.

$\frac{x - 2}{-3} = k$ ise $x = 2 - 3k$ $\quad \frac{y + 1}{4} = k$ ise $y = -1 + 4k$ $\quad \frac{z}{-2} = k$ ise $z = -2k$

A(2 - 3k, - 1 + 4 k, -2k) noktasıdır. Bu nokta E düzleminin bir noktası olduğundan, verilen düzlemin denklemini sağlar. $2 - 3k - 2(-1 + 4k) + (-2k) + 9 = 0$

$-13k + 13 = 0$ $\qquad k = 1$ dir.

$k = 1$ için $x = 2 - 3k = 2 - 3 .1 = 2 - 3 = -1$ dir.

$y = -1 + 4k = -1 + 4.1 = -1 + 4 = 3$ tür.

$z = -2k = -2.1 = -2$ dir.

O halde, A noktasının koordinatları A(-1, 3, -2) noktası olur.

ÖRNEK 48: Uzayda, vektörel denklemi, $(x, y, z) = (4, 2, 2) + k(0, 2, -2)$ olan d doğrusunun, denklemi $x + 2y - 2z - 12 = 0$ olan E düzlemini kestiği noktanın koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM 48: d doğrusunun E düzlemini kestiği nokta A(x, y, z) olsun. Doğru denkleminden, $x = 4$, $y = 2 + 2k$, $z = 2 - 2k$ olur. Bunlar düzlem denkleminde yerine yazılırsa $4 + 2(2 + 2k) - 2(2 - 2k) - 12 = 0$,

$$4 + 4 + 4k - 4 + 4k - 12 = 0$$

$$8k - 8 = 0 \qquad k = 1 \text{ elde edilir.}$$

$k = 1$ için ; $x = 4$ tür.

$y = 2 + 2k = 2 + 2.1 = 2 + 2 = 4$ tür.

$z = 2 - 2k = 2 - 2.1 = 2 - 2 = 0$ dır.

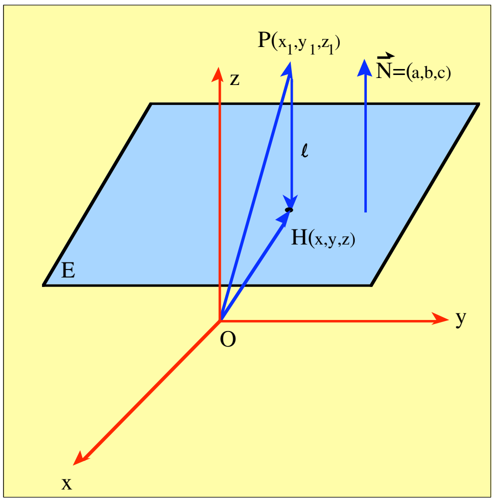
O halde d doğrusunun E düzlemini kestiği A noktasının koordinatlarıA (4, 4, 0) noktası olur.

VII. Uzayda bir noktanın bir düzleme uzaklığı

Uzayda, denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan E düzlemi ile bu düzlemin dışında bir $P(x_1, y_1, z_1)$ noktası veriliyor.

P noktasının E düzlemine olan uzaklığı, P noktasından E düzlemine dik çizilen PH doğru parçasının uzunluğudur. (Şekil 2. 25)

E düzleminin normali $\vec{N} = (a, b, c)$ vektörü , E düzlemine dik olan $\overrightarrow{PH}$ vektörüne paraleldir.



Şekil 2.25

Burada, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH}$ dir. Bu eşitliğin her iki tarafını $\vec{N}$ vektörü ile iç çarpımını yaparsak $\vec{N} . \overrightarrow{OP} + \vec{N} . \overrightarrow{PH} = \vec{N} . \overrightarrow{OH}$ dır.

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + \|\vec{N}\| . \|\overrightarrow{PH}\| = ax + by + cz \quad \text{olur.}$$

$ax + by + cz + d = 0$ ise $ax + by + cz = -d$ dir. Bu değeri yukarıda yerine yazarsak $ax_1 + by_1 + cz_1 + \|\vec{N}\| . \|\overrightarrow{PH}\| = -d$ olur.

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} . \|\overrightarrow{PH}\| = ax_1 + by_1 + cz_1 + d \text{ eşitliğinden}$$

$$\ell = \|\overrightarrow{PH}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ olarak bulunur.}$$

Düzlemin dışındaki $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının, $ax+by+cz+d = 0$ düzlemine olan uzaklığı, $\|\overrightarrow{PH}\| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ifadesi ile bulunur.

$P(x_1,y_1,z_1)$ noktası E düzlemi üzerinde ise P noktasının E düzlemine uzaklığı sıfırdır. Böylece, $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ denklemini sağlar.

ÖRNEK 49: Uzaydaki P(3, 4, 1) noktasının, $2x + y - z + 5 = 0$ denklemi ile verilen düzleme olan uzaklığını bulalım.

ÇÖZÜM 49: Uzaydaki P(3, 4, 1) noktasının, $2x + y - 2z + 5 = 0$ düzlemine olan uzaklığı, $\|\overrightarrow{PH}\| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ifadesinden,

$$\|\overrightarrow{PH}\| = \frac{|2.3 + 1.4 + (-1).1|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (2)^2}} = \frac{|6 + 4 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ birim olur.}$$

ÖRNEK 50: Uzaydaki P(3, -2, 4) noktasının, $2x + 6y + 3z + d = 0$ düzlemine olan uzaklığı, 2 birim ise “d” nin değerini bulalım.

ÇÖZÜM 50: Uzayda bir noktanın bir düzleme olan uzaklığı

$\|\overrightarrow{PH}\| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ifadesinde uygulanırsa,

$$2 = \frac{|2(3) + 6(-2) + 3(4) + d|}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} \; ; \; 2 = \frac{|6 - 12 + 12 + d|}{\sqrt{4 + 36 + 9}}$$

$2 = \dfrac{|6 + d|}{\sqrt{49}}$; $2 = \dfrac{|6 + d|}{7}$; $|6 + d| = 14$ olur. Bu denklemi çözersek,

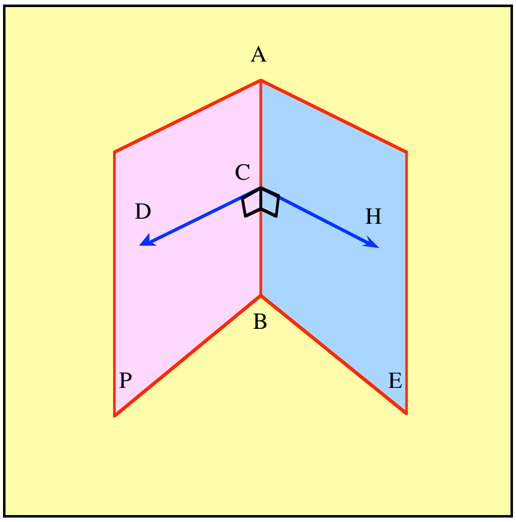
$6 + d_1 = 14$ ise $d_1 = 14 - 6 = 8$ dir. $6 + d_2 = -14$ ise $d_2 = -14 - 6 = -20$ di

Bulduğumuz d_1 ve d_2 değerleri problemin çözümüdür.

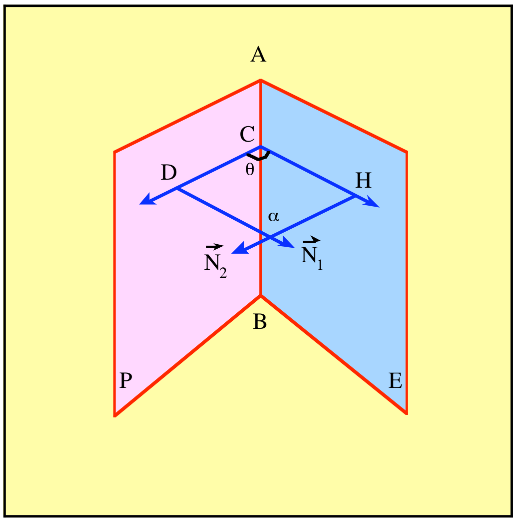
VIII. Uzayda iki düzlem arasındaki açı

Uzayda P ve E gibi iki düzlem verilsin. Bu düzlemler birbirini bir AB doğrusu boyunca keserler. Bu doğruya düzlemlerin arakesit doğrusu denir. (Şekil 2.26)

AB arakesit doğrusu üzerindeki bir C noktasından, P düzlemi içinde kalan ve arakesit doğrusunu dik olan CD doğrusu çizilir. Aynı şekilde, AB arakesit doğrusu üzerindeki bir C noktasından, E düzlemi içinde kalan ve arakesit doğrusuna dik olan, CH doğrusu çizilir. Bu iki dikme arasındaki θ açısına, P ile E düzlemleri arasındaki ölçek açı denir (Şekil 2.27).



Şekil 2.26



Şekil 2.27

Şimdi de, bu ölçek açıyı hesaplayalım.

Verilen P düzleminin denklemi $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve **E** düzleminin denklemi, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ olsun.

Bu iki düzlem arasındaki ölçek açı θ olsun. (Şekil 2.27) deki bu düzlemlerin $\vec{N}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ve $\vec{N}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ normal vektörleri arasındaki açı da α olsun

Dörtgenlerde iç açıların ölçüleri toplamı 360° olduğundan, verilen iki düzlemin arasındaki açının ölçüsü, düzlemlerin normal vekörleri arasındaki açının ölçüsünün bütünleridir.

$\theta + \alpha = 180°$ ise $\theta = 180° - \alpha$ $\quad \cos\theta = \cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$ dir. $\quad \cos\alpha = \dfrac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \cdot \|\vec{N}_2\|}$

olduğundan $\cos\theta = \dfrac{-\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \cdot \|\vec{N}_2\|} = -\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$ olarak bulunur.

Uzayda denklemi $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ olan P düzlemi ile, denklemi $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ olan E düzlemi arasındaki açı θ olsun.

Bu θ ölçek açısının ölçüsü, $\cos\theta = -\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$ dir.

ÖRNEK 51: P düzleminin denklemi $\sqrt{2}\,x - 2y + \sqrt{2}z - 8 = 0$ ve E düzleminin denklemi, $2x + 2\sqrt{2}\,y - 2z - 3 = 0$ olarak veriliyor. P ve E düzlemleri arasındaki ölçek açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 51: P düzleminin denklemi $\sqrt{2}x - 2y + \sqrt{2}z - 8 = 0$ olduğundan, P düzleminin normali $\vec{N_1} = (\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})$ vektörüdür. E düzleminin denklemi $2x + 2\sqrt{2}y - 2z - 3 = 0$ olduğundan, E düzleminin normali $\vec{N_2} = (2, 2\sqrt{2}, -2)$ vektörüdür. P ve E düzlemleri arasındaki ölçek açı θ ise,

$$\cos\theta = -\frac{\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\| \cdot \|\vec{N_2}\|} = -\frac{(\sqrt{2})(2) + (-2)(2\sqrt{2}) + (\sqrt{2})(-2)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-2)^2 + (\sqrt{2})^2}\ \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2 + (-2)^2}}$$

$$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2+4+2}\ \sqrt{4+8+4}} = -\frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{8}\ \sqrt{16}} = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ ise $\theta = 60°$ olur.

IX. Uzayda iki düzlemin paralel olma şartı

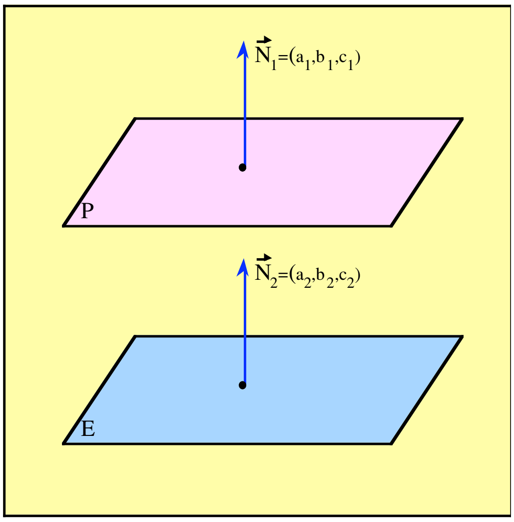
Uzayda, denklemi $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ olan P düzlemi ile denklemi $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ olan E düzlemi veriliyor. Bu düzlemlerin normal vektörleri, birbirine paralel ise düzlemlerde birbirine paraleldir (Şekil 2.28)

P // E ise $\vec{N_1} // \vec{N_2}$ ve

$\vec{N_1} = k\,\vec{N_2}$ $(k \in R)$ dir.

P// E ise $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ $(k \in R)$ olur.

Bu şarta iki düzlemin paralellik şartı denir.



Şekil 2.28

ÖRNEK 52: Uzayda, denklemi $2x - 3y + 6z - 2 = 0$ olan P düzleminin, $ax - 3y + 6z + 5 = 0$ denklemiyle verilen E düzlemine paralel olması için "a" değerini bulalım.

ÇÖZÜM 52: Uzayda, denklemi $2x - 3y + 6z - 2 = 0$ olan P düzleminin, normal vektörü, $\vec{N_1} = (2, -3, 6)$ vektörüdür. Denklemi $ax - 3y + 6z + 5 = 0$ olan E düzleminin normal vektörü, $\vec{N_2} = (a, -3, 6)$ vektörüdür.

P ve E düzlemleri paralel olduğundan $\vec{N_1} // \vec{N_2}$ dir. Buradan

$\frac{2}{a} = \frac{-3}{-3} = \frac{6}{6}$ olduğundan $a = 2$ olur.

X. Uzayda iki düzlemin dik olma şartı

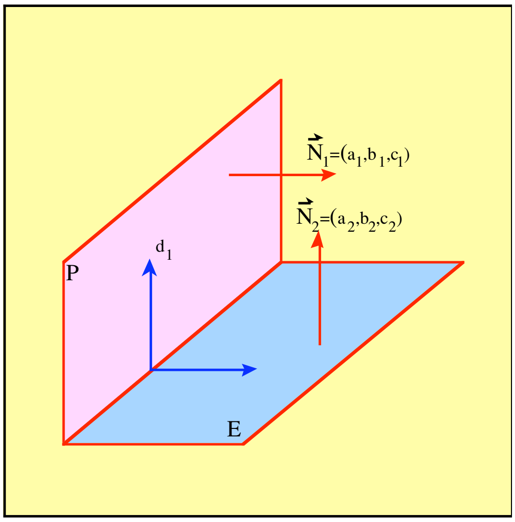
Uzayda denklemleri $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ olan P düzlemi ile $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ olan E düzlemleri birbirine dik ise $\overrightarrow{N_1}$ normal vektörü $\overrightarrow{N_2}$ normal vektörüne diktir (Şekil 2.29).

$P \perp E$ ise $\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$ ve $\overrightarrow{N_1} . \overrightarrow{N_2} = 0$ dır.

$\overrightarrow{N_1} = (a_1, b_1, c_1)$ ve $\overrightarrow{N_2} = (a_2, b_2, c_2)$ ise

$\overrightarrow{N_1} . \overrightarrow{N_2} = a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1 . c_2$ dir.

$\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$ ise $a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1 . c_2 = 0$ olur.
Bu şarta, iki düzlemin diklik şartı denir.



Şekil 2.29

ÖRNEK 53: Uzayda denklemi $3x - 2y + 4z - 1 = 0$ olan P düzlemi ile denklemi $2x - by + z + 3 = 0$ olan E düzlemi veriliyor. Bu düzlemler birbirine dik ise "b" nin değerini bulalım.

ÇÖZÜM 53: Uzayda denklemi $3x - 2y + 4z - 1 = 0$ olan P düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_1} = (3, -2, 4)$ tür. Denklemi $2x - by + z + 3 = 0$ olan E düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_2} = (2, -b, 1)$ dir. P düzlemi E düzlemine dik olduğundan $\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$ olup $\overrightarrow{N_1} . \overrightarrow{N_2} = 0$ dır. $\overrightarrow{N_1} . \overrightarrow{N_2} = 3. 2 + (-2) . (-b) + 4. 1 = 0$

$$6 + 2b + 4 = 0 \;;\; 2b = -10 \;;\; b = -5 \text{ olur.}$$

XI. Uzayda düzlem demeti

Uzayda, iki düzlemin ara kesitinden geçen bütün düzlemlere, uzayda düzlem demeti denir.

Uzayda, denklemleri $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ olan P düzlemi ile $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ olan E düzleminin arakesiti olan AB doğrusundan geçen düzlem demetinin denklemi $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + k\ (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ $(k \in R)$ dir.

ÖRNEK 54: Uzayda, denklemi $x - 3y + 2z - 1 = 0$ olan P düzlemi ile $2x - y + z + 3 = 0$ olan E düzleminin arakesit doğrusundan ve A(1, -2, 1) noktasından geçen düzlemin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM 54: Denklemi $x - 3y + 2z - 1 = 0$ ve $2x - y + z + 3 = 0$ olan P ve E düzlemlerinin arakesitinden geçen düzlemlerin denklemi

$x - 3y + 2z - 1 + k\,(2x - y + z + 3) = 0$ dır. (I.)

A (1, - 2, 1) noktasının koordinatları bu denklemi sağlayacağından,

$1 - 3(-2) + 2.1 - 1 + k[2.1 - (-2) + 1 + 3] = 0$
$1 + 6 + 2 - 1 + k(2 + 2 + 1 + 3) = 0$
$8 + 8k = 0$
$k = -1$ olur.

Bu değer (I.) denklemde yerine yazılırsa istenilen düzlemin denklemini buluruz.

$x - 3y + 2z - 1 + (-1)(2x - y + z + 3) = 0$
$x - 3y + 2z - 1 - 2x + y - z - 3 = 0$
$-x - 2y + z - 4 = 0$ veya $x + 2y - z + 4 = 0$ olur.

ÖRNEK 55: Denklemleri, $x - 2y + 3z + 4 = 0$ ve $2x + y - z - 1 = 0$ olan P ve E düzleminin arakesit doğrusundan geçen ve denklemi $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ olan doğruya paralel olan düzlemin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM 55: Denklemi, $x - 2y + 3z + 4 = 0$ ve $2x + y - z - 1 = 0$ olan P ve E düzlemlerinin arakesitinden geçen düzlemlerin denklemi ;

$x - 2y + 3z + 4 + k(2x + y - z - 1) = 0$ veya
$(1 + 2k)x + (-2 + k)y + (3 - k)z - k + 4 = 0$ dır.

Bu düzlemin normal vektörü, $\vec{N} = (1 + 2k, -2 + k, 3 - k)$ dir. Denklemi verilen $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{V} = (2, 1, -1)$ vektörüdür.

Verilen doğru, denklemi istenilen düzleme paralel olduğundan,

$\vec{N} \perp \vec{V}$ ve $\vec{N} . \vec{V} = 0$ dır.
$\vec{N} . \vec{V} = (1 + 2k).2 + (-2 + k).1 + (3 - k)(-1) = 0$
$2 + 4k - 2 + k - 3 + k = 0$
$6k - 3 = 0$ ise $k = \frac{1}{2}$ olur.

Bu değer düzlem denkleminde yerine yazılırsa istenilen düzlemin denklemi:

$x - 2y + 3z + 4 + k(2x + y - z - 1) = 0$
$x - 2y + 3z + 4 + \frac{1}{2}(2x + y - z - 1) = 0$
$2x - 4y + 6z + 8 + 2x + y - z - 1 = 0$
$4x - 3y + 5z - 7 = 0$ olur.

ÖRNEK 56: Uzayda denklemi $5x - 2y + 3z - 8 = 0$ ve $3x - y + z - 1 = 0$ olan P ve E düzlemleri veriliyor. Bu düzlemlerin arakesit doğrusunu bulalım.

ÇÖZÜM 56: Uzayda denklemleri, $5x - 2y + 3z - 8 = 0$ ve $3x - y + z - 1 = 0$ olan P ve E düzlemlerinin arakesit doğrusunu bulmak için ($k \neq 0$ ve $k \in R$ olmak üzere) $z = k$ parametresini alalım. Bu değerleri düzlem denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{array}{r} 5x - 2y + 3k - 8 = 0 \\ 2\,/\quad 3x - y + k - 1 = 0 \\ \hline 5x - 2y + 3k - 8 = 0 \\ \mp 6x \pm 2y \mp 2k \pm 2 = 0 \\ \hline -x + k - 6 = 0 \\ x = k - 6 \end{array}$$ dır.

$3x - y + k - 1 = 0$ denkleminde uygularsak,

$3(k - 6) - y + k - 1 = 0$

$3k - 18 - y + k - 1 = 0$

$y = 4k - 19$ ve $z = k$ dır.

Buna göre, $x = k - 6$, $y = 4k - 19$, $z = k$ parametrik denklemi, verilen doğrunun denklemini kartezyen denklemi olarak yazarsak,

$$\frac{x+6}{1} = \frac{y+19}{4} = \frac{z}{1}$$ olur.

7. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

I. Tanım Düzlemde a, b ve c birer reel sayı olmak üzere, x_1 ve x_2 düzlemde değişken bir noktanın sırasıyla apsis ve ordinatı olsun. Buna göre, $ax_1 + bx_2 + c = 0$ denklemi, düzlemde bir doğrunun denklemidir. Bu denkleme doğrusal denklem veya x_1 ile x_2 ye göre, bir lineer denklem denir.

Uzayda, a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere x_1, x_2 ve x_3 değişken bir noktanın koordinatları olsun. O zaman, $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ denklemi uzayda bir düzlem denklemidir. Bu denkleme de, x_1, x_2 ve x_3 e göre, bir lineer denklem denir.

Bilinmiyenlerin derecesi en çok bir olan denklemlere lineer denklem denir. Yani değişkenlerin derecesi birinci dereceden olan cebirsel denklemlerdir.

ÖRNEK 57: $x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4 = 0$ denkleminin cinsini belirtelim. Uzayda neyi gösterdiğini yazalım.

ÇÖZÜM 57: $x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4 = 0$ denklemi üç bilinmeyenli birinci dereceden bir lineer denklemdir. Uzayda bir düzlemi gösterir.

ÖRNEK 58: $x - 3xy - 5 = 0$ denkleminin bir lineer denklem olup olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM 58: $x - 3xy - 5 = 0$ denklemi bir lineer denklem değildir. Denklemde xy gibi 2. dereceden bilinmeyen vardır. Denklem ikinci dereceden bir denklemdir.

II. Lineer denklem sistemleri

$a_{ij} \in R$, $b_i \in R$, $i,j \in N$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için,

x_j ler bilinmiyenleri göstermek üzere;

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

biçiminde değişkenleri birinci dereceden olan denklemlerden meydana gelen sisteme **lineer denklem sistemi** denir.

Lineer denklem sisteminde;

1. m tane denklem vardır.

2. n tane bilinmeyen vardır.

3. a_{ij} ler bilinmeyenlerin kat sayılarıdır.

4. b_i ler denklem sistemin sabitleridir.

5. x_n ler denklem sisteminde bilinmeyenlerdir.

Verilen denklem sisteminde, her i = 1, 2, 3, ..., m için

$b_i = 0$ ise bu denklem sistemine lineer homojen denklem sistemi denir.

Verilen denklem sisteminde b_i lerden en az biri sıfırdan farklı ise, bu sisteme lineer homojen olmayan denklem sistemi denir.

Verilen denklem sisteminde denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitse, bu denklem sistemine karesel denklem sistemi denir.

Verilen bir denklem sisteminde bilinmiyenlerin sayısı, denklem sayısından az veya çok olabilir.

ÖRNEK 59: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin cinsini belirtelim.

ÇÖZÜM 59: Verilen denklem sistemi üç bilinmiyenli iki denklemli homojen olmayan bir lineer denklem sistemidir. Çünkü sabit terim vardır.

III. Çözüm kümesi

Daha önceki bölümlerde gördüğümüz gibi, bilinmiyenleri x ile y olan iki bilinmiyenli bir lineer denklem sistemindeki denklemi sağlayan tüm (x, y) ikililerinin kümesine, bu denklem sisteminin çözüm kümesi denir.

Lineer denklem sistemi üç bilinmiyenli ise bu sistemin çözüm kümesi, sistemdeki denklemleri sağlayan tüm (x, y, z) üçlülerinin kümesidir .

Verilen bir denklem sisteminde çözüm kümesinin elemanlarını bulmak için, yapılan işlemlere de bu sistemi çözmek denir.

Her lineer denklem sisteminin çözüm kümesinin bir elemanı olması gerekmez. Bazı denklem sistemlerinde, çözüm kümesinin birden fazla elemanı da olabilir.

Çözüm kümeleri aynı olan lineer denklem sistemlerine de, denk lineer denklem sistemleri denir.

Bazı lineer denklem sistemlerininin çözümü olmayabilir. Bir lineer denklem sisteminin çözümü yoksa, sistemin çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \varnothing$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 60: $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \end{array}\right\}$ Üç bilinmeyenli iki lineer denklemi veriliyor.

$Ç_1 = \{ (-1, 3, 2) \}$ ve $Ç_2 = \{(1, 2, 4) \}$ çözüm kümelerinden hangisinin verilen denklem sisteminin çözüm kümesi olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 60: $Ç_1 = \{(-1, 3, 2)\}$ çözüm kümesini,

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$ olan birinci denklemde uygularsak,

$2 (-1) -1 (3) + 3 (2) = 1$; $-2 - 3 + 6 \stackrel{?}{=} 1$; $1 = 1$ dir.

$x_1 +3x_2 - 5x_3 = - 2$ olan ikinci denklemde uygularsak,

$(-1) + 3 (3) - 5 (2) = - 2$; $-1 + 9 - 10 \stackrel{?}{=} - 2$; $- 2 = -2$ olduğundan

$Ç_1$ çözüm kümesi birinci ve ikinci denklemleri sağlıyor.

$Ç_2 = \{(1, 2, 4) \}$ çözüm kümesini,

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$ olan birinci denklemde uygularsak,

$2 (1) - (2) + 3 (4) = 1$; $2 - 2 + 12 \stackrel{?}{=} 1$; $12 \neq 1$ dir.

$x_1 + 3x_2 - 5x_3 = - 2$ olan ikinci denklemde uygularsak,

$1 (1) + 3 (2) - 5 (4) = - 2$; $1 + 6 - 20 \stackrel{?}{=} - 2$; $- 13 \neq - 2$ olduğundan

$Ç_2$ kümesi birinci ve ikinci denklemi sağlamıyor.

O halde, $Ç_1$ kümesi denklem sistemini sağladığı için çözüm kümesidir. $Ç_2$ kümesi ise denklem sistemini sağlamadığı için çözüm kümesi değildir.

IV. Lineer denklem sistemlerinin çözüm yolları

Lineer denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için, aşağıdaki yöntemleri kullanacağız.

a. Yok etme yöntemi.

b. Yerine koyma yöntemi.

c. Cramer (Kramer) yöntemi.

Bu üç yöntemden başka çözüm yolları da vardır. Lineer denklem sistemlerin çözümü için, bunlardan başka yöntemleri görmeyeceğiz.

a. Yok etme (kuralı) yöntemi:

Bu yöntem ile verilen lineer denklem sistemini çözerken, denklemlerden birisi uygun bir sabit ile çarpılarak bilinmiyenlerden birinin kat sayıları eşitlenir. Kat sayıları eşitlenen iki denklemi, taraf tarafa çıkararak kat sayıları eşit olan bilinmiyenler yok edilir. Böylece verilen sisteme denk yeni bir denklem sistemi bulunur. Aynı işleme, denklemlerden birisi bir bilinmiyenli oluncaya kadar devam edilir. Bulunan bir bilinmiyenli denklem çözülür. Elde edilen bu değer, diğer denklemlerde yerine yazılarak bilinmiyenler hesaplanır.

ÖRNEK 61

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{array}\right\}$$

Lineer denklem sistemini yok etme yöntemini ile çözelim.
Çözüm kümesini yazalım.

ÇÖZÜM 61

$$\begin{array}{rr} & x - 2y = 1 \\ & 2x + y = 12 \\ \hline & 2x - 4y = 2 \\ - & \mp 2x \mp y = \mp 12 \\ \hline & -5y = -10 \\ & y = 2 \text{ dir.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ x - 2(2) = 1 \\ x - 4 = 1 \\ x = 5 \text{ tir.} \end{array}$$

O halde, denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(5, 2)\}$ olur.

b. Yerine koyma yöntemi.

Bu yöntemle, verilen lineer denklem sistemini çözerken denklemlerin birinden herhangi bir bilinmeyen diğer bilinmeyenler cinsinden yazılır. Bu değer, diğer denklemde, yerine konularak bu sisteme denk yeni bir denklem sistemi elde edilir. Bu işleme, bir bilinmeyenli denklem elde edilinceye kadar devam edilir. En son elde edilen bir bilinmeyenli denklem çözülür. Bulunan bu değer, diğer deneklemlerde yerine yazılarak bilinmiyenler bulunur.

ÖRNEK 62

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 17 \\ 2y - x = 9 \end{array}\right\}$$ Denklem sistemini yerine koyma yöntemi ile çözelim. Çözüm kümesini yazalım.

ÇÖZÜM 62

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 17 \\ 2y - x = 14 \end{array}\right\}$$ Denklem sisteminde birinci denklemden y değerini x cinsinden yazalım. $y = 17 - 2x$ tir.

Bu değeri ikinci denklemde yerine koyalım. $2\,(17 - 2x) - x = 14$ olur.

Bu denklemi çözersek,

$34 - 4x - x = 14$; $-5x = -20$; $x = 4$ tür.

$y = 17 - 2x = 17 - 2(4) = 17 - 8 = 9$ dur.

O halde, denklem sisteminin çözüm kümesi Ç = { (4, 9)} olur.

c. Cramer (Kramer) yöntemi.

a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ifadesine ikinci dereceden determinant denir.

Bu determinantın değeri, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ şeklinde hesaplanır.

ÖRNEK 63

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ determinatının değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM 63

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (1)\,(4) - (2)\,(-3) = 4 + 6 = 10$ olur.

ÖRNEK 64 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ determinatının değerini bulalım.

ÇÖZÜM 64 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$\Delta = [\,(1)(-1)(2) + (1)(3)(1) + (1)(2)(1)\,] - [\,(1)(-1)(1) + (1)(3)(1) + (1)(2)(2)\,]$

$\Delta = [\,-2+3+2\,] - [\,-1+3+4\,] = 3 - 6 = -3$ olur.

Cramer yöntemi ile denklem sistemini çözmek için bilinmeyen sayısı, denklem sayısına eşit olmalıdır. Buna göre determinatlar yardımıyla çözülebilen sistemlere Cramer denklem sistemleri denir.

Buna göre;

Cramer denklem sistemini çözmek için, bilinmeyenlerin kat sayılar determinantı olan Δ hesaplanır.

1. $\Delta \neq 0$ ise sistemin tek çözümü vardır. Kat sayılar determinantında her bilinmiyenin katsayıları yerine denklemlerindeki sabitler yazılarak bilinmeyenlere ait Δ_x, Δ_y , Δ_z, ... gibi determinatları hesaplanır.

Bilinmiyenler ise; $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$,... ile bulunur.

2. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ise sistemin sonsuz çözümü vardır.

3. $\Delta = 0$ iken Δ_x, Δ_y ve Δ_z lerden en az biri sıfırdan farklı ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

Cramer yöntemi, sadece kat sayılar matrisi karesel ve determinantı sıfırdan farklı olan lineer denklem sistemlerine uygulanır.

ÖRNEK 65: $\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 3 \\ -x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ Lineer denklem sistemini Cramer yöntemini kullanarak çözelim.

Çözüm kümesini yazalım.

ÇÖZÜM 65: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$

$\Delta = [\,(1)(1)(-1) + (-1)(-1)(-1) + (2)(2)(2)\,] - [\,(2)(1)(-1) + (1)(-1)(2) + (-1)(2)(-1)\,]$

$\Delta = (-1-1+8) - (-2-2+2) = 6 + 2 = 8$ dir.

Δ_x'i bulmak için, x'in kat sayıları yerine sabit terimler yazılır.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\Delta_x = [(0)(1)(-1) + (-1)(-1)(1) + (2)(3)(2)] - [(2)(1)(1) + (0)(-1)(2) + (-1)(3)(-1)]$$

$\Delta_x = (0 + 1 + 12) - (2 + 0 + 3) = 13 - 5 = 8$ dir.

Δ_y'yi bulmak için, y'nin kat sayıları yerine sabit terimler yazılır.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\Delta_y = [(1)(3)(-1) + (0)(-1)(-1) + (2)(2)(1)] - [(2)(3)(-1) + (1)(-1)(1) + (0)(2)(-1)]$$

$\Delta_y = (-3 + 0 + 4) - (-6 - 1 + 0) = 1 + 7 = 8$ dir.

Δ_z 'yi bulmak için z'nin kat sayıları yerine sabit terimler yazılır.

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$\Delta_z = [(1)(1)(1) + (-1)(3)(-1) + (0)(2)(2)] - [(0)(1)(-1) + (1)(3)(2) + (-1)(2)(1)]$$

$\Delta_z = (1 + 3 + 0) - (0 + 6 - 2) = 4 - 4 = 0$ dır.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1 \ ; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1 \ ; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{8} = 0$$

O halde, verilen lineer denklem sisteminin çözüm kümesi; Ç = { (1, 1, 0) } dir.

Şimdi de bu değerlerin lineer denklem sistemini sağladığını görelim.

$x - y + 2z = 0$ denkleminde uygularsak,

$(1) - (1) + 2\,(0) = 0$; $1 - 1 + 0 = 0$; $0 = 0$ dır. Denklemi sağlıyor.

$2x + y - 2 = 3$ denkleminde uygularsak,

$2(1) + (1) - (0) = 3$; $2 + 1 - 0 = 3$; $3 = 3$ tür. Denklemi sağlıyor.

$-x + 2y - z = 1$ denkleminde uygularsak ,

$-(1) + 2(1) - (0) = 1$; $-1 + 2 - 0 = 1$, $1 = 1$ dir. Denklemi sağlıyor.

O halde, lineer denklem sisteminin tek çözüm kümesi Ç = {(1, 1, 0) } kümesi olur.

V. Lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulma ve geometrik anlamını açıklama.

Bir lineer denklemde iki bilinmeyen varsa, bu denklem analitik düzlemde bir doğru belirtir. Bir Lineer denklemde üç bilinmiyen varsa bu denklem analitik uzayda bir düzlem belirtir. Şimdi de bir lineer denklem sisteminin çözüm kümesinin geometrik anlamını açıklayalım.

a. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemler

İki bilinmeyenli $ax + by + c = 0$ şeklindeki denklemlerin düzlemde bir doğru belirttiğini biliyoruz. Bu doğrular $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ şeklinde iki doğru verildiğinde düzlemde bunlar üç durumda olurlar. Geometrik durumlarını açıklayalım ve çözüm kümelerini bulalım.

1. Verilen iki bilinmeyenli $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lineer denklemlerin katsayıları arasında,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ bağıntısı varsa, denklemlerin belirttiği doğrular çakışıktır.

Sistemi sağlayan sıralı ikililer, bu doğrulardan birinin üzerindeki noktaların koordinatlarıdır. Bu durumda ; $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ dır.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ dır. $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ dır.

$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ olduğundan verilen lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

ÖRNEK 66: $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 6y &= 8 \end{aligned}\right\}$ Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını açıklayalım.

ÇÖZÜM 66: Verilen lineer denklem sisteminin katsayıları arasında

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ bağıntısı varsa, bu denklemlerin belirttiği doğrular çakışıktır.

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ olduğundan, bu denklemlerin belirttiği doğrular çakışıktır.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 4.3 = 12 - 12 = 0$ dır.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 4.6 - 8.3 = 24 - 24 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2.8 - 4.4 = 16 - 16 = 0$$

$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ olduğundan denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

Çözüm kümesini bulmak için;

$2x + 3y = 4$ denkleminde $y = k$ alırsak $(k \in R)$, $2x + 3k = 4$ olur.

$2x = 4 - 3k$; $x = \frac{4 - 3k}{2}$ dir.

Denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \left\{(x,y) \mid x = \frac{4-3k}{z},\ y = k\right\}$ olur.

Bu doğrular çakışıktır. k nin her değeri bu doğruları sağlayan sıralı ikililerdir.

2. Verilen iki bilinmeyenli $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ lineer denklemin katsayıları arasında $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ bağıntısı varsa, denklemlerin belirttiği doğrular birbirine paraleldir. Bu denklemlerin ortak çözümü yoktur.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$$

olduğundan sistemin çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \varnothing$ olur.

ÖRNEK 67: $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 5 \end{array}\right\}$ Lineer denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını açıklayalım.

ÇÖZÜM 67: Verilen denklem sisteminin katsayıları arasında $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ifadesini uygularsak $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{3}{5}$ olduğundan, denklemlerin belirttiği doğrular birbirine paraleldir.

Bu lineer denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 6.1 = 6 - 6 = 0 \text{ dır.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3.3 - 5.\,1 = 9 - 5 = 4 \text{ tür.}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 6.3 = 10 - 18 = -8 \text{ dir.}$$

$\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ ve $\Delta_y \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümesidir. $Ç = \varnothing$ olur. Bu doğrular kesişmezler. Birbirine paraleldirler.

3. Verilen iki bilenmiyenli $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ lineer denklem siseminin katsayıları arasında $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ bağıntısı varsa denklemin belirttiği doğrular, bir noktada kesişir. Kesim noktasının koordinatları, denklem sisteminin çözüm kümesidir.

Bu durumda;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$ olduğundan, denklem sisteminin bir tek çözümü vardır. .

ÖRNEK 68: $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned}\right\}$ Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını açıklayalım.

ÇÖZÜM 68: Verilen lineer denklem sisteminin katsayıları arasında $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ifadesini uygularsak, $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-3}$ olduğundan denklemlerin belirttiği doğrular bir noktada kesişirler.

Bu kesim noktasının koordinatlarını bulalım.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3) - (2)(1) = -9 - 2 = -11$$

$\Delta \neq 0$ olduğundan sisteminin bir tek çözümü vardır.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-3) - (1)(4) = -3 - 4 = -7 \text{ dir.}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 1.2 = 12 - 2 = 10 \text{ dur.}$$

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-7}{-11} = \dfrac{7}{11}$ dir. ; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{10}{-11} = -\dfrac{10}{11}$ dir. Çözüm kümesi,

$Ç = \left\{\left(\dfrac{7}{11}, -\dfrac{10}{11}\right)\right\}$ olur. Bu doğrular $\left(\dfrac{7}{11}, -\dfrac{10}{11}\right)$ noktasında kesişirler.

b. İki bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemler

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sisteminin bir çözüm kümesi olabilmesi için denklemlerin belirttiği doğruların sabit bir noktadan geçmesi gerekir. Bu sistemi oluşturan denklemler, aynı doğru demetinin elemanları olmalıdır.

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için herhangi iki denklem ortak çözülür. Bu çözüm kümesinin elemanları diğer denklemi de sağlıyorsa bu denklem sisteminin çözüm kümesidir. Yok eğer sağlamıyorsa, denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

ÖRNEK 69:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + 4y &= 2 \\ 7x + 21y &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM 69: Denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için ilk iki denklemin oluşturduğu denklem sistemini çözelim.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 1.1 = 8 - 1 = 7 \text{ dir.}$$

$\Delta \neq 0$ olduğundan, denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 1.2 = 12 - 2 = 10$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 1.3 = 4 - 3 = 1$$

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{10}{7}$ dir. ; $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{1}{7}$ dir. Çözüm kümesi $Ç = \left\{\left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{1}{7}\right)\right\}$ olur.

Bu çözüm kümesini üçüncü $x + 3y = 13$ denkleminde uygulayalım.

$7\left(\dfrac{10}{7}\right) + 21\left(\dfrac{1}{7}\right) = 10$; $10 + 3 = 13$; $13 = 13$ olur. Bu denklemi sağlıyor. O halde, çözüm kümesi $Ç = \left\{\left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{1}{7}\right)\right\}$ dir. Verilen üç doğru da koordinatları $\left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$ olan sabit bir noktadan geçiyor demektir.

c. Üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemler

Üç bilinmiyenli $ax + by + cz + d = 0$ denklemi analitik uzayda bir **düzlem** belirtir.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini sağlayan sıralı üçlüler, her iki düzlem üzerindeki ortak noktaların koordinatlarıdır. Uzayda iki düzlem birbirine göre üç durumda olur.

1. Verilen $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y$, $c_2z + d_2 = 0$ denklem sisteminde, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$ bağıntısı varsa, sistemdeki denklemlerin belirttiği düzlemler çakışıktır.

Sistemin çözüm kümesini bulmak için, $k, t \in R$ olmak üzere $y = k$ ve $z = t$ dersek, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ denkleminde $a_1x + b_1k + c_1t + d_1 = 0$ ve

$x = -\dfrac{b_1k + c_1t + d_1}{a_1}$ dir.

Çözüm kümesi, $Ç = \left\{\left(-\dfrac{b_1k + c_1t + d_1}{a_1}, k, t\right) \; k, t \in R\right\}$ olur.

ÖRNEK 70: Uzayda $x - 2y + 3z - 1 = 0$ olan P düzlemi ile $3x - 6y + 9z - 3 = 0$ olan E düzlemi veriliyor. Bu düzlemlerin çözüm kümesini bulalım. Geometrik olarak açıklayalım. Şeklini çizelim.

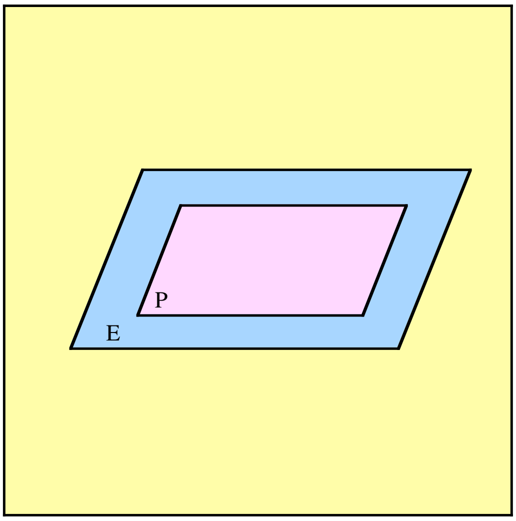
ÇÖZÜM 70: Verilen $x - 2y + 3z - 1 = 0$ ve $3x - 6y + 9z - 3 = 0$ düzlem denklemlerinin katsayılarını oranlarsak, $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9} = \frac{-1}{-3}$ eşitliği olduğundan denklemlerin belirttiği düzlemler çakışıktır. Yani P düzlemi ile E düzlemi çakışıktır.

Bu düzlemlerin çözüm kümesinin belirttiği sıralı üçlüleri bulmak için, birinci denklemde alınan bir noktanın koordinatları $y = k$, $z = t$ olsun $(k, t \in R)$

Bu durumda, $x - 2k + 3t - 1 = 0$ olur.

$x = 2k - 3t + 1$ dir. O halde denklem sisteminin çözüm kümesi,

$Ç = \{(2k - 3t + 1, k, t) \; k, t \in R\}$ olur. (Şekil 2. 30) da çizilmiştir. O halde, P ve E düzlemleri çakışıktır. k ve t nin bütün değerleri, bu düzlemleri sağlayan sıralı üçlülerdir.



Şekil 2.30

2. Uzayda $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ gibi üç bilinmeyenli iki Lineer denklem sistemi veriliyor. Bu denklemlerde $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ bağıntısı varsa denklem sistemindeki denklemlerin belirttiği düzlemler paraleldir.

Bu düzlemlerin ortak noktası yoktur. Verilen denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

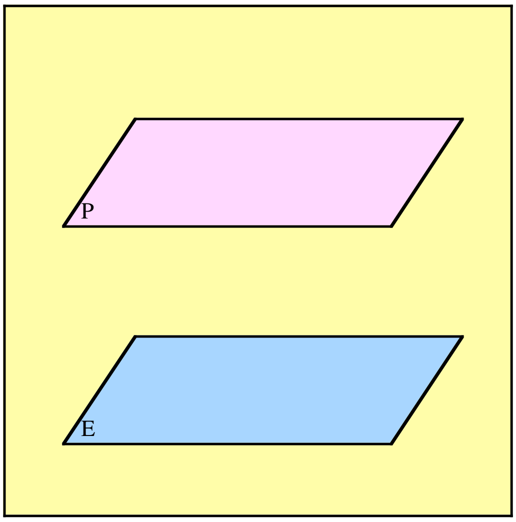
ÖRNEK 71

Uzayda denklemleri $x - 2y - 3z + 4 = 0$ olan P düzlemi ile, $3x + 6y - 9z - 5 = 0$ olan E düzlemi veriliyor. Bu düzlemlerin çözüm kümesini bulalım. Geometrik olarak açıklayalım. Şeklini çizelim.

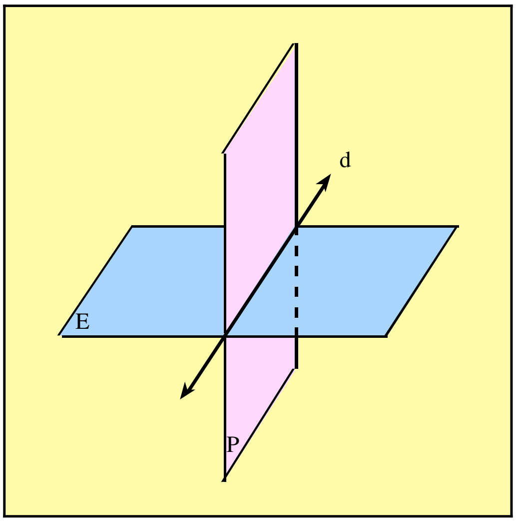
ÇÖZÜM 71

Verilen $x + 2y - 3z + 4 = 0$ ve $3x + 6y - 9z - 5 = 0$ düzlem denklemlerinin katsayılarını oranlarsak $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{4}{-5}$ olduğundan,

lineer denklemlerin belirttiği P düzlemi, E düzlemine paraleldir. Denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \varnothing$ olur. (Şekil 2.31) de çizilmiştir.



Şekil 2.31



Şekil 2.32

3. Uzayda $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y = c_2z + d_2 = 0$ gibi üç bilinmeyenli iki lineer denklem sistemi veriliyor. Bu denklemlerde

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ veya $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ bağıntısı varsa denklemlerin belirttiği düzlemler, bir doğru boyunca kesişirler. Bu doğruya arakesit doğrusu denir.

k bir reel sayı olmak üzere $z = k$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1k + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2k + d_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin çözümünde x ve y değerleri k parametresi cinsinden yazılarak, sistemdeki denklemlerin belirttiği arakesit doğrusunun parametrik denklemi bulunur. Buradan arakesit doğrusunun kartezyen denklemi yazılır.

ÖRNEK 72: Uzayda denklemleri $2x - y + 2z - 3 = 0$ olan P düzlemi ile $x + 2y - z - 1 = 0$ olan E düzlemi veriliyor. Bu düzlemlerin çözüm kümesini bulalım. Geometrik olarak açıklayalım. Şeklini çizelim.

ÇÖZÜM 72: Verilen $2x - y + 2z - 3 = 0$ ve $x + 2y - z - 1$ düzlem denklemlerinin katsayılarını oranlarsak,

$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1}$ olduğundan, bu denklemlerin

belirttiği düzlemler (Şekil 2.32) de olduğu gibi bir d doğrusu boyunca kesişirler. Bu arakesit doğrusu üzerindeki noktaların koordinatları çözüm kümesinin elemanlarıdır.

Arakesit doğrusu olan d doğrusunun denklemini yazalım.

k bir reel sayı olmak üzere $z = k$ olsun. Böylece denklem sistemini, iki bilinmiyenli denklem şeklinde çözelim.

$$\begin{array}{l} 2/\ \ 2x - y = 3 - 2k \\ \quad\ x + 2y = 1 + k \\ \hline 4x - 2y = 6 - 4k \\ x + 2y = 1 + k \\ \hline 5x = 7 - 3k \\ x = \dfrac{7 - 3k}{5} \end{array}$$

$$2\left(\frac{7 - 3k}{5}\right) - y = 3 - 2k$$

$$14 - 6k - 5y = 15 - 10k$$

$$5y = -1 + 4k$$

$$y = \frac{-1 + 4k}{5}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesi, $Ç = \left\{\left(\frac{7 - 3k}{5}, \frac{-1 + 4k}{5}, k\right) \; k \in R\right\}$ olur.

Arakesit doğrusunun parametrik denklemi, $x = \frac{7}{5} - \frac{3}{5}k$, $y = \frac{-1}{5} + \frac{4}{5}k$, $z = k$ dır.

Arakesit doğrusunun kartezyen denklemi, $\dfrac{x - \frac{7}{5}}{-\frac{3}{5}} = \dfrac{y + \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{z}{1}$ olur.

d. Üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemler

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Üç bilinmiyenli üç denklemden oluşan bu sistemde, her bir denklem analitik uzayda bir düzlem belirtir.

Analitik uzayda verilen üç düzlemin birbirine göre durumlarını inceleyelim.

1. Üç düzlemin bir tek ortak noktası vardır.

2. Üç düzlemin bir tek ortak doğrusu vardır.

3. Düzlemlerden ikisi birbirine paralel, diğeri bu iki düzlemi keser.

4. Düzlemlerden ikisi çakışık, diğeri bunları keser.

5. Düzlemden ikisi çakışık, diğeri bunlara paraleldir.

6. Düzlemlerin üçü de birbirine paraleldir.

7. Düzlemlerin üçüde birbirine çakışıktır.

Şimdi de bunlarla ilgili örnekler vererek, bu düzlemlerin çözüm kümelerini bulalım. Bunları geometrik anlamlarını şekil çizerek açıklayalım.

1. Üç düzlemin bir tek ortak noktası vardır.

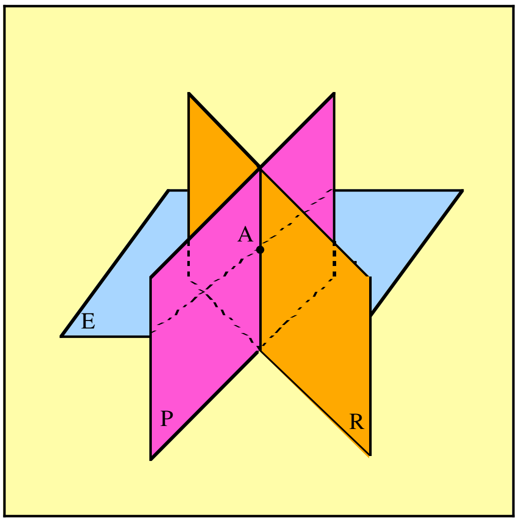
ÖRNEK 73:
$$\left.\begin{aligned} x - y - 3z + 10 &= 0 \\ x - y + z - 2 &= 0 \\ -2x + y - z + 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını şekil çizerek açıklayalım.

ÇÖZÜM 73: Verilen denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için, yok etme kuralını uygulayalım.

$$\begin{array}{r} x - y - 3z + 10 = 0 \\ \mp x \pm y \mp z \pm 2 = 0 \\ \hline -4z + 12 = 0 \\ 4z = 12 \\ z = 3 \text{ tür.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} x - y + z - 2 = 0 \\ -2x + y - z + 3 = 0 \\ \hline -x + 1 = 0 \\ x = 1 \text{ dir.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} x - y + z - 2 = 0 \\ 1 - y + 3 - 2 = 0 \\ -y + 2 = 0 \\ y = 2 \text{ dir.} \end{array}$$

Buna göre, denklem sisteminin çözüm kümesi Ç = {(1, 2, 3)} kümesidir. Bu sıralı üçlü, verilen denklem sisteminin belirttiği düzlemlerin ortak noktasıdır. Verilen üç denklemi de sağlar. (Şekil 2.33) te verilen P, E ve R düzlemlerin bir tek A ortak noktası vardır.



Şekil 2.33

2. Üç düzlemin bir tek doğrusu vardır.

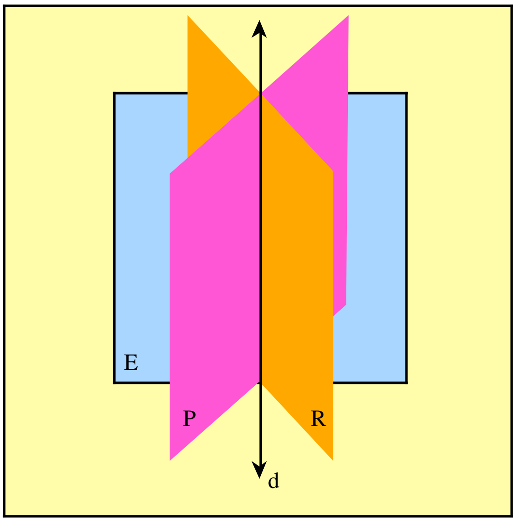
ÖRNEK 74:
$$\left.\begin{aligned} x - y - 3z + 10 &= 0 \\ x - y + z - 2 &= 0 \\ 7x + 7y - 2z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını şekil çizerek açıklayalım.

ÇÖZÜM 74

Verilen denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için, yok etme kuralını uygulayalım.

$$\begin{array}{r} x - y - 3z + 10 = 0 \\ \mp x \pm y \mp z \pm 2 \;= 0 \\ \hline -4z + 12 = 0 \\ 4z \;= 12 \\ z = 3 \text{ tür.} \end{array}$$



Şekil 2.34

Burada k bir reel sayı olmak üzere $x = k$ dersek, denklem $7k + 7y - 2\,(3) - 1 = 0$ olur.

$7y = 7 - 7k$ $\qquad y = 1 - k$ dır.

Verilen denklem sisteminin çözüm kümesi; $Ç = \{(k,\ 1 - k,\ 3)\}$ kümesidir.

(Şekil 2.34) de verilen P, E ve R düzlemlerin arakesit doğrusu d doğrusudur. Bu doğrunun denklemini parametrik olarak yazarsak, $x = k$, $\quad y = 1 - k$, $\quad z = 3$ tür.

Kartezyen denklem ise, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{-y + 1}{1} = \dfrac{z - 3}{0} = k$ olur.

Arakesit doğrusunun denklemini sağlayan bütün noktalar, verilen üç düzlem üzerinde bulunurlar.

3. Düzlemin ikisi birbirine paralel, diğeri bu iki düzlemi keser.

ÖRNEK 75

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 5 = 0 \\ -x + 2y - 3z \;= 0 \end{array}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını şekil çizerek açıklayalım.

ÇÖZÜM 75: Birinci denklem P düzlemi, ikinci denklem E düzlemi ve üçüncü denklemde R düzlemi olsun. Birinci ve ikinci denklemin katsayıları arasında

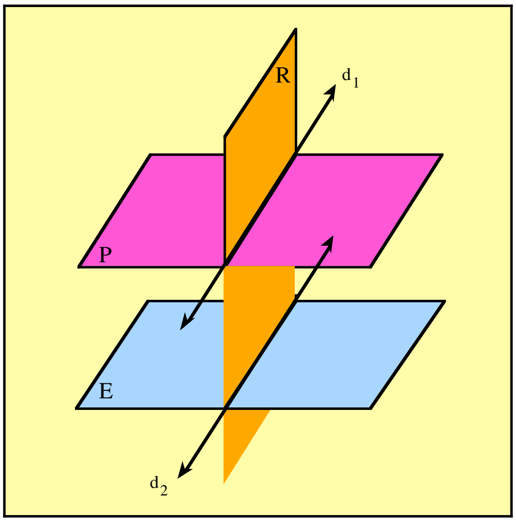
$\dfrac{1}{1} = \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-2}{-5}$ bağıntısı olduğundan,

P // E düzlemidir. P ve R düzlemleri kesiştiğinden, arakesit doğrusu d_1 olsun. Bu doğrunun denklemini bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z - 2 = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

denklem sisteminde k bir reel sayı olmak üzere z = k olsun.

$$\begin{array}{rl} & x - y + k - 2 = 0 \\ + & -x + 2y - 3k = 0 \\ \hline & y - 2k - 2 = 0 \\ & y = 2 + 2k \text{ dır.} \end{array}$$



Şekil 2.35

x - y + z - 2 = 0 denkleminde y ve z nin değerlerini uygularsak,

$x - (2 + 2k) + k - 2 = 0$ $\qquad$ $x = 2 + 2k - k + 2 = k + 4$ tür.

Buna göre d_1 doğrusunun parametrik denklemi:

$x = 4 + k$; $\qquad$ $y = 2 + 2k$; $\qquad$ $z = k$ dir.

d_1 doğrusunun kertezyen denklemi : $\dfrac{x - 4}{1} = \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{z - 0}{1}$ olur.

E ve R düzlemleri kesiştiğinden arakesit doğrusu d_2 olsun. Bu doğrunun denklemini bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z - 5 = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminde k bir reel sayı olmak üzere z = k olsun.

$$\begin{array}{rl} & x - y + k - 5 = 0 \\ + & -x + 2y - 3k = 0 \\ \hline & y - 2k - 5 = 0 \\ & y = 5 + 2k \text{ dir.} \end{array}$$

x - y + k - 5 = 0 denkleminde y nin değerlerini uygularsak,

$x - (5 + 2k) + k - 5 = 0$ $\qquad$ $x = 5 + 2k - k + 5 = k + 10$ dur.

Buna göre d_2 doğrusunun parametrik denklemi,

$x = 10 + k$; $\qquad$ $y = 5 + 2k$, $\qquad$ $z = k$ olur.

d_2 doğrusunun kartezyen denklemi,

$\dfrac{x - 10}{1} = \dfrac{y - 5}{2} = \dfrac{z - 0}{1}$ olur.

d_1 doğrusunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_1} = (1, 2, 1)$ vektörüdür. d_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_2} = (1, 2, 1)$ vektörüdür.

$\overrightarrow{V_1} // \overrightarrow{V_2}$ olduğundan , d_1 ve d_2 dir. Buradan, d_1 ve d_2 doğruları kesişmezler.

O halde, verilen denklem sistemine ait üç düzlem kesişmediğinden çözüm kümesi boş kümedir. Ç = Ø olur. (Şekil 2. 35) de şekil çizilmiştir.

4. Düzlemlerden ikisi çakışık, diğeri bunları keser.

ÖRNEK 76:
$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ -x + 2y - 3z + 4 = 0 \\ x + y - 6z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$
Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını şekil çizerek açıklayalım.

ÇÖZÜM 76

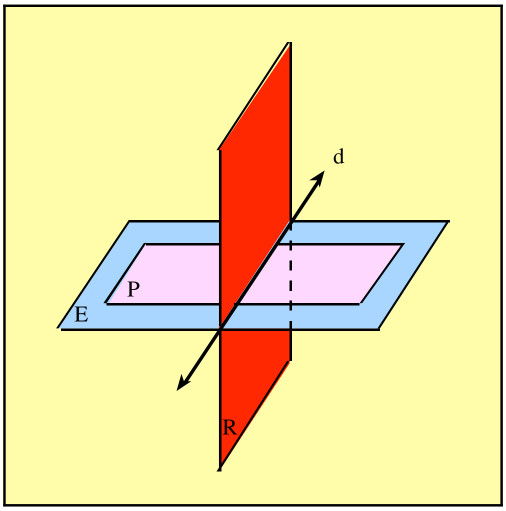
Birinci denklem P düzlemi, ikinci denklem E düzlemi ve üçüncü düzlemde R düzlemi olsun. Burada P denklem ile E düzlemi aynıdır. P düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_1}$, E düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_2}$ ise

$\overrightarrow{N_1} = -\overrightarrow{N_2} = (1, -2, 3)$ vektörüdür.

R düzlemin normal vektörü,

$\overrightarrow{N_3} = (1, 1, -6)$ vektörüdür.

(Şekil 2.36) da olduğu gibi P ve E düzlemleri çakışık ve R düzlemi bu iki düzlemi kesmektedir.



Şekil 2.36

Şimdi de bu düzlemlerin arakesit doğrusu olan d doğrusunun denklemini bulalım.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ x + y - 6z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$
denklem sisteminde k bir reel sayı olmak üzere z = k olsun.

$$\begin{array}{r} x - 2y + 3k - 4 = 0 \\ \mp x \mp y \pm 6k \pm 1 = 0 \\ \hline -3y + 9k - 3 = 0 \end{array}$$

$$3y = -3 + 9k$$

$$y = -1 + 3k \text{ dır.}$$

$x + y - 6k - 1 = 0$ denkleminde y nin değerini uygularsak,

$x - 1 + 3k - 6k - 1 = 0$; $x - 3k - 2 = 0$; $x = 2 + 3k$ dır.

Denklemin çözüm kümesi $Ç = \{(2 + 3k, - 1 + 3k, k) \ k \in R\}$ olur.

P, E ve R düzlemlerin arakesit doğrusu olan d doğrusunun parametrik denklemi,

$x = 2 + 3k$; $y = - 1 + 3k$; $z = k$ olur.

d doğrusunun kartezyen denklemi, $\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{3} = z$ olur.

5. Düzlemlerden ikisi çakışık, diğeri bunlara paraleldir.

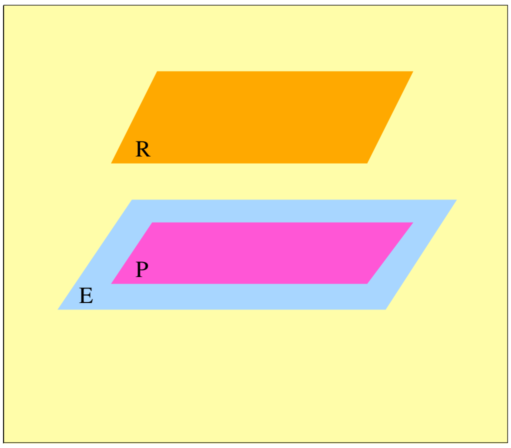
ÖRNEK 77 $\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4 &= 0 \\ -x - 2y - 3z - 4 &= 0 \\ x + 2y + 3z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$ Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını şekil çizerek açıklayalım.

ÇÖZÜM 77

Birinci denklem P düzlemi, ikinci denklem E düzlemi ve üçüncü denklem R düzlemi olsun. P düzleminin denkleminin kat sayıları ile E düzleminin denkleminin katsayılarını oranlarsak, $\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{3}{-3} = \frac{4}{-4}$ olduğundan, P düzlemi ile E düzlemi çakışıktır.

P düzlemi denkleminin katsayıları ile R düzleminin denkleminin katsayılarını oranlarsak, $\frac{-1}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{-3}{3} \neq \frac{-4}{-1}$ olduğundan, P düzlemi ile R düzlemi paraleldir.

(Şekil 2.37) de şekli çizilmiştir. O halde, bu denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \varnothing$ olur.



Şekil 2.37

6. Düzlemlerin üçüde birbirine paraleldir.

ÖRNEK 78

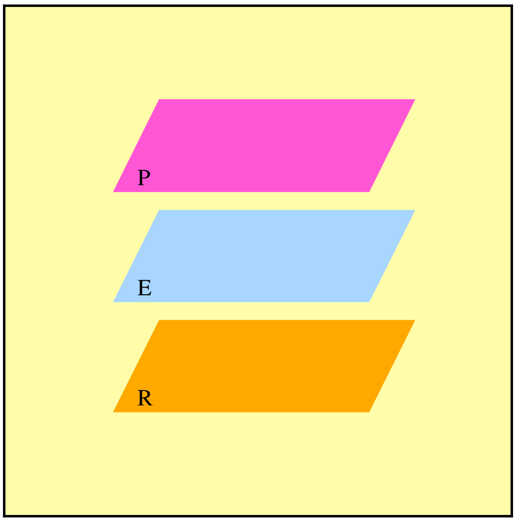
$$\left.\begin{array}{l} 2y + y - 3z + 1 = 0 \\ 4x + 2y - 6z + 2 = 0 \\ 6x + 3y - 9z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını şekil çizerek açıklayalım.

ÇÖZÜM 78

Birinci denklem P düzlemi, ikinci denklem E düzlemi ve üçüncü denklem de R düzlemi olsun.

P düzleminin normal vektörü, $\overrightarrow{N_1} = (2, 1, -3)$ E düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_2} = (4, 2, -6)$, R düzleminin normal vektörü, $\overrightarrow{N_3} = (6, 3, -9)$ dur.



Şekil 2.38

$\overrightarrow{N_1} // \overrightarrow{N_2}$ vektörüdür. Çünkü $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$ dır.

$\overrightarrow{N_1} // \overrightarrow{N_3}$ vektörüdür. Çünkü $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{-3}{-9}$ dur.

$\overrightarrow{N_2} // \overrightarrow{N_3}$ vektörüdür. Çünkü $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{-6}{-9}$ dur.

Buna göre denklem sisteminde her denklemin belirttiği düzlem, diğer denklemlerin belirttiği düzlemlere paraleldir. Bu düzlemlerin ortak noktaları yoktur. P,E ve R düzlemleri pareleldir (Şekil 2.38). Bu verilen düzlemlerin ortak noktaları olmadığından, denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \emptyset$ olur.

7. Düzlemlerin üçü de birbirine çakışıktır.

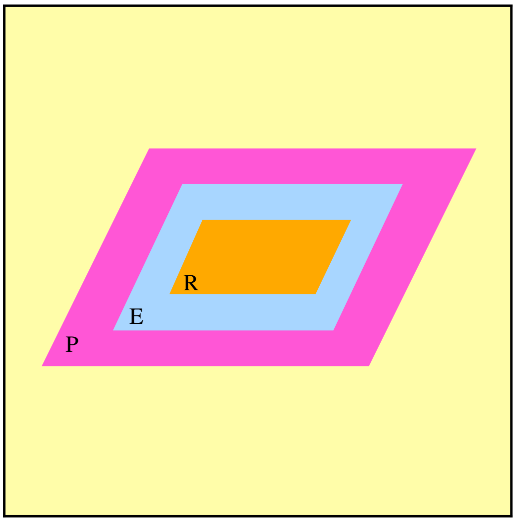
ÖRNEK 79

$$\left.\begin{array}{l} 2y + y - 3z + 1 = 0 \\ 4x + 2y - 6z + 2 = 0 \\ 6x + 3y - 9z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım. Geometrik anlamını şekil çizerek açıklayalım.

ÇÖZÜM 79

Birinci denklem P düzlemi, ikinci denklem E düzlemi ve üçüncü düzlem de R düzlemi olsun. (Şekil 2.39) Bu düzlemlerin denklemleri, iki düzlemin çakışık olma şartı olan $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}\right)$ ifadesini sağladığı için P, E ve R düzlemleri çakışıktır. Bu düzlemler çakışık olduğundan, denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.



Şekil 2.39

Düzlemlerin biri üzerindeki her noktanın koordinatları, diğer düzlemlerin denklemlerini sağlar. O halde, denklemin sonsuz çözümü vardır.

k ve t birer reel sayı olmak üzere z = k ve y = t alırsak, $x + 2y - 3z + 1 = 0$ denkleminde uygularsak, $x + 2t - 3k + 1 = 0$; $x = -1 + 3k - 2t$ olur.

Denklem sisteminin çözüm kümesi, $Ç = \{(-1 + 3k - 2t, t, k)\ k, t \in R\}$ olur. Böylece, verilen denklem sisteminin k ve t ye bağlı olarak sonsuz çözümü vardır.

ÖZET

***Analitik uzay:** Analitik düzlemin dışında da noktalar vardır. Analitik düzlemin noktaları ile bu düzlemin dışındaki bütün noktalar, **analitik uzayı** meydana getirir.

* **Analitik uzayda koordinat sistemi :** Uzaydaki bir O noktasında, birbirine dik olan üç tane ekseninin oluşturduğu sisteme, **uzayda koordinat sistemi** denir. Bu eksenler Ox , Oy ve Oz ile gösterilir. Bu koordinat eksenlerinin ikişer ikişer oluşturdukları, birbirine dik üç düzleme **koordinat düzlemleri** denir.

* **Bir noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığı:** Analitik düzlemde, $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının eksenlerin başlangıç noktasına olan uzaklığı; $|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ birimdir.

* **İki nokta arasındaki uzaklık:** Analitik uzayda, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık , $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ birimdir.

* **Bir doğru parçasının orta noktası :** Analitik uzayda uç noktaları, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ olan AB doru parçasının orta noktası $C(x_0, y_0, z_0)$ ise

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{ve} \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \text{dir.}$$

* **Küre denklemi:** Uzayda, sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **küre yüzeyi,** küre yüzeyi ile sınırlanan cisme **küre** denir. Sabit nokta M(a, b, c) kümenin merkezi, küre üzerindeki nokta P (x , y, z) ve kürenin yarıçap uzunluğu r ise kürenin denklemi, $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ dir.

Kürenin denklemini, $x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ şeklinde de yazılır. Bu durumda merkezinin koordinatları,

$M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$ ve yarıçap uzunluğu da $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$ birim olur.

* **Uzayda vektörler:** Uzayın her iki noktası bir vektör belirtir. Başlangıç noktası O, analitik uzayın noktalarından biri P(a,b,c) ise $\overrightarrow{OP}$ vektörüne, P noktasının **yer** (konum) **vektörü** denir. $\vec{P} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ şeklinde yazılır.

* **$\overrightarrow{AB}$ Vektörünün bileşenleri:** Uzayda $A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ noktaları verildiğinde, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün bileşenleri $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ vektörüdür.

* **Bir vektörün uzunluğu:** Uzayda $A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ noktaları ile verilen $\overrightarrow{AB}$ vektörünün uzunluğu, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ birimdir.

Uzunluğu bir birim olan vektöre, **birim vektör** denir.

*** İki vektörün eşitliği:** Uzayda, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri veriliyor. $\vec{A} = \vec{B}$ olabilmesi için, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ve $a_3 = b_3$ olmalıdır.

*** Vektörler kümesinde toplama işlemi:** Uzaydaki vektörler kümesinde, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$ vektörüne $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörünün toplamı denir.

Uzayda vektörler kümesi, toplama işlemine göre **değişmeli gruptur.**

*** Vektörler kümesinde çıkarma işlemi:** Uzayda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri veriliyor. $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$ şeklindeki işleme çıkarma işlemi denir.

$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri için

$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$ olur.

*** Bir vektörün bir reel sayı ile çarpımı:** Her $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $k \in R$ için

$k\vec{A} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ vektörüne, $\vec{A}$ vektörünün k sayısı ile çarpımı denir.

*** Bir vektörün standart taban vektörüne göre ifadesi**

Analitik uzayda, $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ ve $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ vektörüne **standart taban (baz) vektörü** denir.

*** İki vektörün paralelliği:** Uzayda $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri için, $\vec{A} = k\vec{B}$ bağıntı varsa, $\vec{A} \parallel \vec{B}$ vektörüdür. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$ ifadesine paralel olma şartı denir.

*** İç çarpım fonksiyonu ve Öklid iç çarpım işlemi:** Uzayda, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = < \vec{A} \,.\, \vec{B} > a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + a_3 . b_3$ şeklinde vektörler çarpımına, **Öklid iç çarpma fanksiyonu** veya **iç çarpma işlemi** denir.

*** Bir vektörün normu (uzunluğu) :** Uzayda $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörü için

$\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{A} . \vec{A}}$ veya $\|\vec{A}\|^2 = \vec{A} \,.\, \vec{A}$ vektörüne,

$\vec{A}$ vektörünün **uzunluğu** veya **normu** denir.

*** İki vektör arasındaki açının kosinüsü** $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri arasındaki açı θ ise $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ dir.

*** İki vektörün dikliği :** Uzayda $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri veriliyor. $\vec{A}$ vektörü $\vec{B}$ vektörüne dik ise $\theta = 90°$ ve $\cos 90° = 0$ olduğundan,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$ olur. Bu bağıntıya diklik şartı denir.

*** Bir noktadan geçen ve bir vektöre paralel olan doğrunun denklemi**

a. Doğrunun vektörel denklemi: Uzayda bir A(a, b, c) noktasından geçen ve $\vec{V} = (x_1, y_1, z_1)$ vektörüne paralel olan doğru üzerinde P (x, y, z) noktasını alalım.

$\vec{V}$ vektörü $\overrightarrow{AP}$ vektörüne paralel olduğu için, $\lambda \in R$ olmak üzere $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{V}$ denklemine, doğrunun **vektörel denklemi** denir.

b. Doğrun parametrik denklemi: Doğrunun vektörel denkleminin bileşenleri cinsinden yazarsak, $(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda\,(x_1, y_1, z_1)$; $x = a + \lambda x_1$; $y = b + \lambda y_1$ $z = c + \lambda z_1$ denklem sistemine doğrunun **parametrik denklemi** denir.

c. Doğrunun kartezyen denklemi: Doğrunun parametrik denklemini oluşturan denklemlerin her birinden λ çekilirse, $\dfrac{x - a}{x_1} = \dfrac{y - b}{y_1} = \dfrac{z - c}{z_1} = \lambda$ denklemine, doğrunun **kartezyen denklemi** veya **nokta koordinatlarına göre denklemi** denir.

*** Uzayda iki noktası verilen doğrunun denklemi**

Uzayda, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ gibi iki nokta verilsin. A ve B noktasından geçen doğru üzerinde bir P(x, y, z) noktasını alalım.

$\overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{B}$ bağıntısı, doğrunun vektörel denklemidir.

$x = x_1 + \lambda\,(x_2 - x_1)$; $y = y_1 + \lambda\,(y_2 - y_1)$; $z = z_1 + \lambda\,(z_2 - z_1)$ denklem sistemine A ve B noktalarından geçen doğrunun **parametrik denklemi** denir.

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$ denklemine A ve B noktalarından geçen doğrunun **kartezyen denklemi** denir.

*** Verilen iki doğrunun birbirine paralel olma durumu**

Uzayda verilen $\frac{x - a_1}{x_1} = \frac{y - b_1}{y_1} = \frac{z - c_1}{z_1}$ ve $\frac{x - a_2}{x_2} = \frac{y - b_2}{y_2} = \frac{z - c_2}{z_2}$ doğruların birbirine paralel olması için $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ olmalıdır.

Verilen doğruların $\vec{V_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{V_2} = (x_2, y_2, z_2)$ doğrultman vektörleri de paraleldir.

*** Verilen iki doğrunun birbirine dik olma durumu:** Uzayda verilen iki doğru birbirine dik ise bu doğruların doğrultman vektörleri de diktir. Doğruların doğrultman vektörleri $\vec{V_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{V_2} = (x_2, y_2, z_2)$ ise $\vec{V_1} \,.\, \vec{V_2} = 0$

olduğundan, $\vec{V_1} \,.\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ olur.

*** Verilen iki doğru arasındaki açının kosinüsü:** Verilen iki doğru arasındaki açı, bu doğruların $\vec{V_1}$ ve $\vec{V_2}$ doğrultman vektörleri arasındaki açıya eşittir.

$$\cos \theta = \frac{\vec{V_1} . \vec{V_2}}{\|\vec{V_1}\| \,.\, \|\vec{V_2}\|} \quad \text{dir.}$$

*** Verilen bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı**

Uzayda verilen P(x, y, z) noktasının, $\frac{x - a}{x_1} = \frac{y - b}{y_1} = \frac{z - c}{z_1}$ doğrusuna olan uzaklığını bulmak için, doğru üzerinde A(a, b, c) noktasını alalım. $\vec{AP}$ vektörü ile doğrunun $\vec{V}$ doğrultman vektörünü yazalım. P noktasının doğruya uzaklağı ℓ ise,

$$\ell = \frac{\sqrt{\|\vec{V}\|^2 \, \|\vec{AP}\|^2 - (\vec{V} \,.\vec{AP})^2}}{\|\vec{V}\|} \quad \text{dir.}$$

*** Uzayda düzlemler:** Geometride düzlemi bazı aksiyomlar ile belirtebiliriz. Bunlar,

a. Doğrusal olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.

b. Bir doğru ile dışındaki bir nokta, bir düzlem belirtir.

c. Paralel iki doğru bir düzlem belirtir.

d. Kesişen iki doğru bir düzlem belirtir.

Düzlem içinde bulunan bütün doğrulara dik olan doğruya, düzlemin **normal doğrusu** denir.

*** Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir vektöre dik olan düzlemin denklemi:** Uzayda verilen nokta $A(x_1, y_1, z_1)$ verilen vektör $\vec{N} = (a, b, c)$ olsun.

Düzlem içinde alınan herhangi bir nokta P(x, y, z) ise A noktasından geçen $\vec{N}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini yazmak için, $\vec{N} \perp \vec{AP}$ ise $\vec{N} . \vec{AP} = 0$ bağıntısı uygulanır.

$\vec{N} . \vec{AP} = a(x - x_1) + . b(y - y_1) + c(z - z_1)$ ifadesi sadeleştirilir ve

$d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$ dersek $ax + by + cz + d = 0$ olur.

Bu denkleme **düzlemin kartezyen denklemi** denir.

*** Bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı**

Uzayda denklemi, $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ olan doğru ile denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan düzlem arasındaki açı θ ise

$$\sin\theta = \frac{p.a + q.b + r.c}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \,.\, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ ifadesi ile bulunur.

*** Doğru ile düzlemin paralel olma şartı**

Uzayda denklemi, $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ olan doğru ile denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan düzlem veriliyor. Doğru düzleme paralel ise $a.p + b.q + c.r = 0$ olur. Bu şarta **doğrunun düzleme parelel olma** şartı denir.

*** Doğru ile düzlemin dik olma şartı :**

Uzayda denklemi, $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ doğrusu ile denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan düzlem veriliyor Doğru düzleme dik ise $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ dir.

Bu şarta **doğrunun düzleme dik olma şartı** denir.

***Bir doğru ile düzlemin ortak (kesim) noktasının koordinatlarını bulmak**

Uzayda , $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ doğrusu $ax + by + cz + d = 0$ düzlemini kesiyorsa, kesim noktasının koordinatlarını bulmak için, önce $k \in R$ olmak üzere doğru ve düzlem denklemleri arasında $k = \frac{(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{ap + bq + cr}$ değeri bulunur.

Bunu doğrunun parametrik denklemi olan $x = x_1 + pk$; $y = y_1 + qk$, $z = z_1 + rk$ uygulanarak doğru ile düzlemin ortak noktasının koordinatları bulunur.

*** Bir noktanın bir düzleme uzaklığı:** Uzayda denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan düzlemin bu düzlemin dışındaki $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasına olan uzaklığı ℓ ise,

$$\ell = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ dir.

*** İki düzlem arasındaki açı:** Uzayda $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ düzlemi ile $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemleri arasındaki açının kosinüsü,

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$ ifadesi ile bulunur.

*** İki düzlemin paralel olma şartı:** Uzayda denklemi $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ düzlemi ile $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemi birbirine paralel ise

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ dir. Bu şarta iki düzlemin **paralellik şartı** denir.

*** İki düzlemin dik olma şartı:** Uzayda, denklemi $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ düzlemi ile $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemleri birbirine dik ise

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ dır. Bu şarta iki düzlemin **diklik şartı** denir.

*** Düzlem demeti:** Uzayda iki düzlemin arakesitinden geçen bütün düzlemlere, **uzayda düzlem demeti** denir.

*** Lineer denklem:** Verilen denklemlerde bilinmiyenlerin derecesi en çok birinci dereceden olan denklemlere **lineer denklem** denir.

*** Çözüm kümesi:** Bir lineer denklem sisteminde denklemleri sağlayan tüm noktalar kümesine, bu denklem sisteminin **çözüm kümesi** denir. Çözüm kümesinin elemanlarını bulmak için yapılan işleme de, bu sistemi **çözmek** denir.

*** Lineer denklem sisteminin çözüm yolları**

Liner denklem sisteminin çözüm yollarını bulmak için:

a. Yok etme yöntemi

b. Yerine koyma yöntemi

c. Cramer (Kramer) yöntemi vardır.

Lineer denklem sistemlerin çözümü için bunlardan başka yöntemler de vardır. Biz başka yöntemleri uygulamayacağız.

*** Lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulma ve geometrik anlamını açıklama**

a. İki bilinmeyenli $ax + by + c = 0$ şeklindeki birinci dereceden denklemler, düzlemde doğruyu gösterirler.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lineer denklemleri veriliyor.

Verilen iki bilinmeyenli iki lineer denkelemlerin katsayıları arasında

1. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ bağıntısı varsa, bu iki doğru çakışıktır.

2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ bağıntısı varsa, bu iki doğru paraleldir.

3. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ bağıntısı varsa, bu iki doğru bir noktada kesişirler.

b. İki bilinmeyenli üç denklemden oluşan denklem sisteminin bir çözüm kümesi olabilmesi için, denklemlerin belirttiği doğruların sabit bir noktadan geçmesi gerekir.

c. Üç bilinmeyenli $ax + by + cz + d = 0$ denklemi analitik uzayda bir düzlem belirtir.

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ denklemlerinin belirttiği iki düzlem verildiğinde bu düzlemlerin birbirine göre durumları

Verilen üç bilinmeyenli iki lineer denklem sisteminin katsayıları arasında;

1. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ bağıntısı varsa bu iki düzlem çakışıktır. Verilen düzlemlerin sonsuz çözüm kümesi vardır.

2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ bağıntısı varsa bu iki düzlem paraleldir. Verilen denklemlerin çözüm kümesi boş kümedir.

3. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ bağıntı varsa, bu iki düzlem bir doğru boyunca kesişir. Bu doğruya **arakesit doğrusu** denir.

d. Üç bilinmeyenli, üç denklemden oluşan denklem sistemi, analitik uzayda üç tane düzlem belirtir. Bu üç düzlemin birbirine göre durumları

1. Üç düzlemin bir tek ortak noktası vardır.
2. Üç düzlemin bir tek ortak doğrusu vardır.
3. Düzlemlerden ikisi birbirine paralel, diğeri bu iki düzlemi keser.
4. Düzlemlerden ikisi çakışık, diğeri bunları keser.
5. Düzlemlerden ikisi çakışık, diğeri bunlara paraleldir.
6. Düzlemlerin üçü de birbirine paraleldir.
7. Düzlemlerin üçü de birbirine çakışıktır.

ALIŞTIRMALAR

1. Uzayda A(2, 3, 4) ve B(-3, -2, 1) noktaları veriliyor. A ve B noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

2. Merkezi M(-1, 3, -1) noktası olan ve P(-1, 3, 5) noktasından geçen kürenin denklemini bulunuz.

3. Uzayda A(3, 1, 4) noktası ile $\overrightarrow{AB} = (5, 2, 1)$ vektörü veriliyor.
   Buna göre, B noktasının koordinatlarını bulunuz.

4. Uzayda $\vec{A} = (2, -1, 3)$ ve $\vec{B} = (3, 2, 4)$ vektörleri veriliyor. $3\vec{A} - 2\vec{B}$ vektörlerinin bileşenlerini bulunuz.

5. Uzayda $\vec{A} = (5, x + y, x)$ ve $\vec{B} = (2x - 1, 2y + 1, x)$ vektörlerinin birbirine parelel olması için, x ve y kaç olmalıdır?

6. Uzayda $\vec{A} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, x\right)$ vektörü, birim vektör ise “x” in değerini bulunuz.

7. Uzayda $\vec{A} = (-3, 2, -4)$ ve $\vec{B} + \vec{C} = (3, 1, 5)$ vektörleri veriliyor. $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ vektörün değerini bulunuz.

8. Uzayda $\vec{A} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_2$ ve $\vec{B} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ vektörleri veriliyor. Bu vektörler arasındaki açı kaç derecedir?

9. Uzayda $\vec{A} = (2, 3, x)$ ve $\vec{B} = (5, 2, 4)$ vektörlerinin dik olması için, x in alacağı değeri bulunuz.

10. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ uzayda iki vektördür. $\vec{A} + \vec{B} = (3, 6, 4)$ ve $\vec{A} - 3\vec{B} = (-1, 2, -4)$ ise $\vec{B}$ vektörünün birleşenlerini bulunuz.

11. Uzayda A(-2, 3, 4) noktasından geçen ve $\vec{V} = (3, 1, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun kartezyen denklemini bulunuz.

12. Denklemi $\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 4}{-3}$ olan doğrunun geçtiği sabit noktayı ve paralel olduğu vektörü bulunuz.

13. Uzayda A(-1, 2, 1) ve B(2, 3, 4) noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

14. Denklemleri, $2x + 3y - z + 2 = 0$ ve $x - y + 3z + 5 = 0$ olan düzlemlerin arakesitinden ve A(0, 1, 0) noktasından geçen düzlemin denklemini yazınız.

15. Merkezi (1, 2, -3) olan ve $2x - y + 2z - 3 = 0$ düzlemine teğet olan kürenin denk - lemini yazınız.

16. Uzayda, denklemi $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ olan d doğrusu ile denklemi $3x - 4y + z + 4 = 0$ olan E düzlemi veriliyor. d doğrusunun E düzlemini kestiği A noktasının koordinatlarını bulunuz.

17. Uzayda, denklemi $\frac{x-2}{p} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4}$ olan doğrunun denklemi $2x + 3y + cz - 5 = 0$ olan düzleme paralel olması için, p ve c arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır?

18. Uzayda, denklemleri $2x - 2y + z - 9 = 0$ ve $2x - 2y + z + 3 = 0$ olan paralel iki düzlem veriliyor. Bu düzlemler arasındaki uzaklık kaç birimdir?

19. Uzayda, denklemleri $x - \sqrt{2}\,y + z + 3 = 0$ ve $-x + \sqrt{2}\,y + z - 5 = 0$ olan düzlemleri veriliyor. Bu düzlemler arasındaki ölçek açının ölçüsünü bulunuz.

20. Uzayda, denklemleri $2x - by + 4z + 3 = 0$ ve $x + 3y + cz + 1 = 0$ olan düzlemlerin birbirine paralel olması için b + c kaçtır?

21. $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$ Denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz. Geometrik yorumunu yapınız.

22. $\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}$ Denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

23. $\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 2x + 4y + 6z + 1 = 0 \\ 3x + 6y + 9z - 8 = 0 \end{array}\right\}$ Denklem sistemini çözünüz. Geometrik yorumunu yapınız.

24. Uzayda, A(3, -2, 3) ve B(2, 1, 4) noktalarından geçen ve $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{2}$ doğrusuna paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

25. Uzayda, paralel iki doğru bir düzlem belirtir. Buna göre, denklemleri $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$ ve $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ olan paralel doğrularının belirttiği düzlemin denklemini bulunuz.

TEST II

1. Uzayda, A(1, 2, 4) ve B(-3, x, 1) noktaları veriliyor. Bu noktalar arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

A) $\sqrt{5}$ B) 4 C) $\sqrt{17}$ D) 5

2. Denklemi $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$ olan kürenin yarıçapının uzunluğu kaç birimdir?

A) 2 B) 3 C) 4 D 5

3. $\vec{A} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, x\right)$ vektörünün birim vektör olması için, x in alacağı değer kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

4. $\vec{A} = (2, 1, 3)$ ve $\overrightarrow{AB} = (3, 2, -1)$ ise $\vec{B}$ vektörünün bileşenleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) (5, 1, 4) B) (5, 3, 2) C) (4, 3, 2) D) (4, -1, 3)

5. $\vec{A} = (2, -1, 3)$ vektörünün toplama işlemine göre tersi olan vektör, aşağıdakilerden hangisidir.

A) (3 - 1, 2) B) (-3, 1, -2) C) (1, - 2, -3) D (-2, 1 , -3)

6. Aşağıdaki vektörlerden hangisi, $\vec{A} = (3, -1, 2)$ vektörüne paralel **değildir?**

A) (-3 , 1, -2) B) (6, -2, 4) C) (6, -3, -4) D (12, -4, 8)

7. $\vec{A} = (2, -1, 3)$ ve $\vec{B} = (-3, 1, 4)$ vektörlerinin Öklid iç çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 13

8. $\vec{A} = (4, 5, -3)$ ve $\vec{B} = (7, 0, 1)$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 30 B) 45 C) 60 D) 90

9. $\vec{A} = (-4, 0, 2)$ vektörünün $\vec{B} = (1, 4, x)$ vektörüne dik olması için, x kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

10. $\vec{A} = (m+2)\vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$ ile $\vec{B} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - n\vec{e_3}$ vektörlerinin birbirine paralel olması için, m + n nin alacağı değer kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

11. Orijin noktasından geçen, $\vec{V} = (1, 2, -2)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2x=y=- z B) x=2y=-2z C) x-1=y-2=z+2 D) x+1=y+2=z-2

12. A (-2, 1, 4) noktasından geçen $\vec{e_2}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A)	B)	C)	D)
$x = -2 + k$	$x = -2$	$x = -2k$	$x = 2 + k$
$y = 1 + k$	$y = 1 + k$	$y = k$	$y = -1 + k$
$z = 4 + k$	$z = 4$	$z = 4$	$z = -4 + k$

13. Denklemi $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ olan doğrunun geçtiği sabit noktanın bileşenleri toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6

14. Denklemleri $\frac{x-1}{a} = \frac{y-3}{b} = \frac{z+2}{4}$ ve $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{2}$ olan iki doğrunun paralel olması için, a ve b nin alacağı değerler toplamı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12

15. Denklemleri $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+4}{a}$ ve $\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{a-1} = \frac{z-1}{2}$ doğruları veriliyor. Bu doğruların birbirine dik olması için "a" nın değeri kaç olmalıdır?

A)-3 B) -1 C) 2 D) 4

16. Denklemleri $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{m}$ ve $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{0}$ doğruları veriliyor. Bu doğrular arasındaki açının ölçüsü 45° olduğuna göre, "m" nin değeri kaç olmalıdır?

A) -2 B) 0 C) 1 D) 3

17. Uzayda, verilen A(3, -1, 2) noktasının, denklemi $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$ olan doğruya olan uzaklığı kaç birimdir?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6

18. Uzayda verilen A(5, -2, 6) noktasının, $6x - 2y + 9z + d = 0$ düzleminden 2 birim uzaklıkta bulunması için, "d" nin değeri kaç olmalıdır?

A) 11 B) 22 C) -44 D) -66

19. Uzayda denklemi $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3}$ olan doğrunun, denklemi $ax + 2y - 3z + 5 = 0$ olan düzleme paralel olması için, "a" nın değeri kaç olmalıdır?

A) -3 B) -2 C) 1 D) 4

20. Uzayda denklemi $\frac{x-1}{p} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{r}$ olan doğrunun, denklemi $6x - 6y + 2z - 3 = 0$ olan düzleme dik olması için, $\frac{p}{r}$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

21.

$$\left.\begin{aligned} x - 5y - 6 &= 0 \\ 2x - 3y - 5 &= 0 \\ 3x - y - 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) ∅ B) { (- 1, 2)} C) { (1, -1)} D) {(-2, -3)}

22.

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + y + z = 4 \end{array}\right\}$$ Denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) { (0, 1, 2)} B) { (1, 2, 3)} C) { (-1, 2, 1)} D) { (1, -1, 2)}

23. Uzayda A(3, 2, 1) noktasından geçen ve $\vec{u} = (3, 1, 2)$ ve $\vec{\vartheta} = (1, -3, 2)$ vektörlerine paralel olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2x +3 y - 5z + 1=0

B) 4x + 2y - 5z - 11 = 0

C) 5x -3y + 8z + 6 = 0

D) x + 3y + 8z - 7 = 0

24. Uzayda A(3, 1, -2) ve B) (2, 3, -4) noktasından geçen ve $\vec{u} = (3, 4, -1)$ vektörüne paralel olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) -6x - 7y + 10z + 45 = 0

B) 3x - 4y + 5z - 15 = 0

C) 8x + 14y - 7z + 17 = 0

D) 2x - 3y - 8z + 7 = 0

25. 3x + 2y - z + 4 = 0 düzlemine dik olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) x + y - 2z + 3 = 0

B) 2x + 3y - 4z + 5 = 0

C) x + 2y - z - 1 = 0

D) 2x + y - z - 2 = 0